

Christian Fahse, Campus Landau

## **Materialien zum Grundvorstellungsbegriff: Sichtung ausgewählter Literatur und ein weiterer Vorschlag zur Begriffsklärung**

Work in progress Stand 12.1.2023

### **Kurz zum Aufbau dieses Textes**

Zunächst werden Merkmale angegeben, bei denen die Auffassungen, die zu Grundvorstellung(en) (GV) in der Literatur zu finden sind, nicht übereinstimmen. Durch Auswahl von jeweils einer bestimmten Merkmalsausprägung entsteht der Vorschlag zur Fassung des GV-Begriffs, der zunächst griffig auf S. 4 formuliert wird. Hinter jedem einzelnen Satz stehen Entscheidungen, Auffassung oder Ziele, die auf S. 5f erläutert werden samt grundsätzlichen Leitlinien für den Vorschlag. Da jedes Detail des Vorschlags irgendwo in der Literatur zu finden ist, versucht S. 8 herauszustellen, worin das Neue dieses Vorschlags besteht. Es folgen Zusammenfassungen anderer Begriffsauffassungen und der Unterschied zum Vorschlag auf S. 4 wird herausgestellt. Illustrationen zu Verortung von GV im semiotischen Dreieck, samt der sozialen Prozesse, die hierzu gehören, findet man zum Schluss.

**Mögliche Zitation:** Fahse, C. (2023). Materialien zum Grundvorstellungsbegriff: Sichtung ausgewählter Literatur und ein weiterer Vorschlag zur Begriffsklärung - Addendum 1 zu Fahse, C. (2022): Grundvorstellungen zur Stochastik. <http://dms.uni-landau.de/m/fahse>

### **Inhalt**

Differierende Kennzeichen von (mathematischen) Grundvorstellungen	S. 2
Vorschlag einer Begriffsklärung zu »Grundvorstellung«	S. 4
Bemerkungen zum Vorschlag	S. 5
Welche Aspekte sind neu oder mehr betont?	S. 8
Excerpt aus Bender 1991	S. 9
Begriffsauffassung bei vom Hofe 1995	S. 10
Begriffsauffassung bei Roth & Siller 2016	S. 11
Begriffsauffassung bei Salle & Clüver 2021	S. 12
Übersehen: Begriffsauffassung bei Klafki 1958 anschließend an Willmann 1882	S. 13
Kurze Begriffsklärungen mehrerer neuerer Autor/innen	S. 15
Illustration und Vorschlag für eine verfeinerte Theorie zur Verortung und Genese von Grundvorstellungen	S. 16
Literaturverzeichnis	S. 20

*Bender 1991, 56*

*„Dazu sind die theoretischen Grundlagen nicht mit hinreichender Operationalität faßbar und einige der Merkmale zu trivial, andere zu speziell und unverbindlich, die meisten auch zu vage. Hier liegt allerdings nicht etwa ein Mangel infolge Unausgereiftheit des GVV-Ansatzes vor, sondern Vagheit ist charakteristisch für ihn und entzieht ihn einer Algorithmisierung.“*

*GVV: Grundvorstellung und -verständnis*

## Differierende Kennzeichen von (mathematischen) Grundvorstellungen

Im Folgenden werden Merkmale von Grundvorstellungen (GV) dargestellt, die in der Literatur differieren. Es wird jeweils eine Entscheidung für eine der Alternativen getroffen, die dann in der Begriffsklärung auf S. 4 zu finden ist. Zur Begründung siehe S. 5f.

Grundvorstellungen ...

1) ... beziehen sich auf einen Fachbezeichner eines Begriffes, der in der Fachmathematik definiert ist, (aber aufgefasst als Bezeichner dieses mathematischen Begriffes in jeglichen Kontexten) - oder nicht.

Es wird Alternative 1 gewählt. „Fachbezeichner“ schließt z. B. Geometrie und Stochastik als Begriffe, zu denen Grundvorstellungen gehören könnten, aus. Sie sind zu allgemein, besitzen keine mathematische Definition und stellen damit kein mathematisches Objekt dar. Ullmann 2015 und Bender 1997 stimmen damit nicht überein.

(»Geometrie« als Bezeichner für ein geometrisches Axiomensystem oder eine differenzierbare Struktur ist bei Ullmann und Bender nicht gemeint - diese könnten GV besitzen.)

2) ... vermitteln zwischen

Begriffen (sozial etabliert/fachlich/nicht individuell) und  
individuellen Vorstellungen bzw. Erfahrungen

oder

zwischen mathematischem Begriff und seinem „Inhalt“.

Es wird Alternative 1 gewählt, da „Inhalt“ (ggf. noch im Unterschied zu Gehalt) zu unpräzise für die Theorie ist. Alternative 2 ist aber für die Praxis eine gute Formulierung, auch wenn oder weil sie Interpretationsspielraum lässt. Das Begriffspaar der Alternative 1 heißt in der fundierten Terminologie von Rembowski 2015 „Begriffskonvention und Begriffsbild“.

3) ... hängen von Individuum, Objekt und Intention ab - oder stehen für sich.

Es wird Alternative 1 gewählt. Es gibt also nur GV von einem Fachbegriff zu einem bestimmten (fiktiven) Individuum mit Alter und Lernvoraussetzungen bzw. Lerngruppe mit Jahrgang und Schulart als Adressat und mit einer bestimmten Lehrintention des Senders, also der Lehrkraft.

4) ... sind präskriptiv oder deskriptiv oder konstruktiv (zu konstruktiv: Salle & Clüver 2021, vom Hofe 1995), vom Hofe: normativ-deskriptiv, Greefrath et al: universell - individuell

In letzter Zeit geht der Konsens in Richtung präskriptiv (vgl. Salle & Clüver 2021, 559), meist normativ genannt. Predigers 2009 Bezeichner »präskriptiv« scheint sprachlich angemessener. Konstruktiv ist die präskriptive Anwendung, die Lernende dazu anleitet, diese GV bei sich aufzubauen. Damit ist konstruktiv streng genommen nicht ausgeschlossen durch eine Einengung auf nur präskriptiv, im Gegenteil: Wenn man eine unterrichtliche Einbettung als Bestandteil des GV-Begriffes sieht und hierbei methodisch zeitgemäße ko-konstruktive, problemorientierte Ansätze vor Augen hat, ist konstruktiv sogar ein Bestandteil von präskriptiv.

5) ... sind fundamental/wesentlich/unverzichtbar/(allgemein?) - oder jeweils eben nicht.

Diese Kennzeichnung sollte auf den Fachbegriff, auf den sich die GV bezieht, zutreffen, wie auch auf die GV selbst. Der weitere fachliche Aufbau bzw. das unterrichtliche Vorgehen sollte ohne diesen Fachbegriff bzw. diese GV nicht möglich sein. Genau an dieser Stelle ist vermutlich noch mehr Theoriearbeit zu leisten.

M. E. sollten GV nur an wirklich zentralen Stellen des Mathematikunterrichtes angelegt werden, da sonst der unterrichtliche Aufwand und der Fluss des Unterrichts zu sehr unterbrochen werden. Ein anderer GV-Begriff würde jeden Aspekt oder sogar jedes Kennzeichen/jede Eigenschaft eines

Begriffes als GV zu diesem Begriff deuten lassen. Dann wäre es z. B. bereits eine GV zum Prozentbegriff, dass das %-Zeichen /100 bedeutet. Das hielte ich für inflationär.

Nebenbemerkung: Verblüffend ist, wie gut die Definition von fundamentaler Idee in von der Bank 2016 auf GV passen, wenn man eine viel kleinere Skala des Begriffssystems wählt:

„Fundamentale Ideen sollten daher im Mathematikunterricht Vernetzungen zwischen Inhalten, deren Repräsentationen, Aktivitäten mit und über Inhalten, deren historischer Genese und der Person des Mathematiktreibenden erkennen lassen.“ (für den Unterricht aufbereitete Definition, von der Bank 2016, 226, vgl. 221)

Fundamentale Ideen vernetzen, sind aber auch im Bereich „Person“ für sich zu finden (von der Bank, 2016, 201f, „Ideenkategorie der Persönlichkeitsideen (Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität, Beharrlichkeit“)). GV (einschließlich Anker) zu den Persönlichkeitsideen wären neu, aber denkbar. Durch die Festlegung auf Fachbegriffe wird in der folgenden Begriffsklärung zu GV diese Richtung nicht verfolgt.

Von der Bank (2016) liefert auch einen Beitrag zur Begriffsklärung von „fundamental“: Sie arbeitet Passagen aus den Arbeiten von J. Bruner so auf, dass auf GV bezogen fundamental als „mit breitem Anwendungsbereich bei spezifischem Transfer“ bedeuten könnte (kein Zitat und sinngemäß für GV vom Autor CF weitergeführt, aber basierend auf von der Bank 2016, 42). Der unspezifische Transfer unterscheidet „fundamentale Idee“ von GV.

6) ... sind anschaulich<sup>1</sup> durch Anker/(paradigmatische) Mustersituation (s. Roth & vom Hofe demnächst/Prediger 2009) - oder eben nicht.

Jürgen Roth betont die Bedeutung eines Vorstellungsankers. Dies findet sich sprachlich bereits bei Bender 1991 als „Verankerung in der Lebenswelt“ angedeutet und in vielen Lerntheorien, die die Anbindung an Beispiele aus grundsätzlichen lernpsychologischen Erwägungen fordern. Jürgen Roth betont hingegen die Entwicklung eines didaktisch besonders geeigneten speziellen Ankers, der für die Lernenden zu dem einen in der Lerngruppe verwendeten Anker wird (ohne weitere, individuelle Anker auszuschließen). Um den GV-Begriff einerseits nicht ausufern zu lassen und andererseits die unterrichtliche Einbindung einschließlich Transferierbarkeit zumindest potenziell in den Begriff mit aufzunehmen, setze ich einen austauschbaren Anker als verpflichtenden Bestandteil des GV-Begriffes. Dies entspricht auch dem Desiderat der Anschaulichkeit/Operativität, denn wie würde sonst die GV anschaulich, wenn nicht an einem konkreten, eben einem sehr gut bekannten Anker-Beispiel.

---

1 „Anschaulich“ ist hier anders als bei Rembowski 2015 verwendet.

## Vorschlag für eine Begriffsklärung zum Bezeichner »Grundvorstellung« (GV) in 4 Punkten

### Verortung: Verständige Anwendung von Fachbegriffen als Funktion von GV

- GV beziehen sich auf einen Fachbegriff, d. h., dass der Begriff neben Anwendungen, verschiedenen Repräsentationen und Vernetzungen auch eine formale Definition in der Mathematik besitzt.
- Erwerben Lernende solch eine GV, so verändert sich ihr individuelles Begriffsbild in Richtung des etablierten Begriffs, der sogenannten Begriffskonvention.
- Diese Veränderung zeigt sich in ihrem immer weiter angepassten Verständnis des Begriffes. Verständnis werde hier durch die Kompetenz zur Anwendung des Begriffs in konkreten Situationen bestimmt, nämlich Kommunikation und soziale Interaktion in der Praxis (insbesondere Modellieren als Erkennen, Interpretieren/Handeln), Vernetzung mit anderen Fachbegriffen in der mathematischen Theorie.

### Adäquanz im Lernprozess (Lernbezogenheit, Abhängigkeit, Entwicklungsperspektive)

GV haben eine bestimmte Funktion *im Unterricht*, nämlich ein *möglichst gutes* Begriffsverständnis abhängig vom potenziellen lernenden Individuum und der Lehrintention<sup>1</sup>. → Damit sind z. B. Emotionen, Einfachheit, Übersichtlichkeit sowie den nächsten Punkt Anschaulichkeit relevant.

<sup>1</sup>Zu Lehrintention: Eine didaktische Reduktion bleibt möglich, Maßstab ist nicht der Fachbegriff allein.

### Anschaulichkeit einschließlich Handlungen und Operationen (mentalen Handlungen) und Anker

GV sind in dem Sinn anschaulich, als sie Musteranwendungen (Anker) nutzen, um Mustersituation, Handlungen, graphische Darstellungen oder Symbolisches zusammenzuführen sowie vorgestellte Handlungen (Operationen) zu ermöglichen. (Anker als mentaler Speicher, Roth & Siller 2016. Der Anker ist ein austauschbarer, aber notwendiger Bestandteil von GV.)

### Fundamentalität

GV sind in dem Sinne fundamental, als ...

- ein volles Verständnis des mathematischen Teilgebietes ohne sie nicht erreicht werden kann (**fachliche Relevanz**)
- man didaktisch nicht auf sie verzichten kann, z.B. um typischen Fehlvorstellungen zu begegnen und um zu kommunizieren (**didaktische und kommunikative Relevanz**)
- der Anker so unterrichtet wurde, dass die Lernenden den Anker auf viele neue Situationen übertragen können (**Transferabilität**). Im Ankerbezug gründet sich das Anwendungsvermögen.

**Kurz:**            **verständlich anwendbar - lernbezogen - anschaulich/operativ -  
fundamental (transferabel sowie fachlich, didaktisch, kommunikativ relevant)**

Außerhalb der Begriffsklärung: Zum Bezeichner »Grundvorstellung«

Es müsste korrekt eigentlich »Grundvorstellungen und -verständnis« und damit GVV (Bender 1991) heißen, da es um Begriffsbilder geht. Da GV üblich geworden ist und GVV sprachlich länger ist, schlage ich vor, bei GV als Bezeichner zu bleiben, der ja ohnehin willkürlich ist. Zusammengesetzte GV als »Grundverständnisse« zu bezeichnen (vom Hofe 2003, 6, verweisend auf Oehl 1970), ist dann aber sprachlich nicht mehr möglich.

## Bemerkungen zum Vorschlag

### Verständnis von Fachbegriffen als Funktion von GV

- Dieser Punkt verortet den Begriff GV in der semiotischen Terminologie von Rembowski 2015. Er behandelt die Beziehung von Grundvorstellung und Fachbegriff, der als sozial konstruiert aufgefasst wird.
- GV beziehen sich auf *etwas*, nämlich auf den Fachbegriff alias die Begriffskonvention, und hängen von *Bedingungen*, den Lernenden und der Unterrichtssituation zumindest potenziell ab. Dieses *etwas* - „Vorstellung wovon?“ - ist hier ein unpersönlich erscheinender Fachbegriff, der aber in diesem Ansatz als sozial vermittelt gedacht wird, also nur über das Verständnis, nur mit Rückgriff auf Gruppen von Individuen, erfasst werden kann. Diese Rahmung des Fachbegriffes hat folgenden Vorteil:
- Statt einer Adäquanz der GV zum Fachbegriff (vgl. Bender 1991, 56, „sachliche und psychologische Adäquatheit“), welche auf schwierige Begriffe wie Strukturgleichheit (Griesel), Inhalt, Sinn usw. führen könnte, wird lediglich ein grobes, operationalisierbares Verständniskonzept genutzt.
- Im allgemeinen Begriff GV ist die Abhängigkeit/Adäquanz von der/zur Lernsituation abstrakt enthalten. Streng genommen werden die Lernenden dabei als Individuen von einem bestimmten Typ und nicht als Einzelpersonen betrachtet, siehe folgende Sprechweise.
- Vorschlag für eine konkrete Sprechweise für das dreistellige Prädikat „GV sein“: „*Relativer Anteil* (Subjekt) ist eine Grundvorstellung zu *Brüchen* (Argument1) in der *Sekundarstufe I des Gymnasiums* (Abhängigkeit/Adäquanz, Argument2)“ und ggf. „mit der Intention x“.
- Mit der Konzentration auf Fachbegriffe fallen die GV von Ullmann zur Geometrie und von Bender zur Stochastik heraus. Denn dies sind Teilgebiete und damit eine wissenschaftsorganisatorische und daher soziale Kategorie, keine Fachbegriffe mit Definition.
- Das hier verwendete *Verständniskonzept* orientiert sich an Dörfler (Zitat fehlt leider) und ist durch Operationalisierung mittels Output-Orientierung gekennzeichnet (im heutigen Sprachgebrauch). Alternativ nennen Greefrath et al. 2016 *Sinn* i. S. v. Vollstedt. Als weitere Alternative lese ich interpretierend Griesel et al. 2019 so, dass bei ihnen die Idee der *Strukturgleichheit* die Funktion für die Begriffsklärung zu GV erfüllt, die hier der grob operationalisierte Verständniskonzept hat. (Zu Strukturgleichheit oder besser Strukturübereinstimmung bei Griesel et al. vgl. Salle & Clüver 2021, 556.)
- Im Rahmen dieser Adäquanz an Lernende und Lernsituation ist auch die Abhängigkeit von der Gruppe, in welcher die Begriffskonvention Gültigkeit besitzt, zu beachten:  
Im Allgemeinen werden die Begriffskonventionen einer fachwissenschaftlichen community, die nach Rembowski 2015 immer analytisch-deduktiv gefasst sind, nicht der (Lern-)Adäquanz gerecht. Es ist gängige Auffassung, dass auch in der fachwissenschaftlichen community zwei Begriffskonventionen nebeneinander bestehen (vgl. Hadamard 1945): eine reichere, mit Intuitionen und typischen, kulturell geteilten Beispielen angereicherte und eine rein deduktiv-analytische Konvention (vgl. der Auto-Vergleich weiter unten). Diese beiden - aufeinander bezogenen - Begriffskonventionen werden wiederum von der didaktischen community (Forschende, Lehrkräfte) aufgenommen, mit vielen Begriffsbildern einzelner Lernenden und ihrem Weiterentwicklungsbedarf abgeglichen, woraus sich Grundvorstellungen als Begriffskonventionen in der Didaktik-community ausbilden. Diese sind allerdings einem Prozess fortwährender Weiterentwicklung unterworfen (siehe hierzu die ausführliche Illustration auf S. 17f).  
Zur Adäquanz vgl. weiterhin „Person“ in von der Bank 2016, 9, Abb. 2.

### Adäquanz im Lernprozess

- Der eine Satz der Begriffsklärung verbindet mehrere Merkmale, die hier aufgeführt sind:
  - Eine GV ist hier in diesem Ansatz immer an eine fiktive oder konkrete didaktische Situation angebunden. (**Lernbezogenheit**). Sie ist deshalb ...
  - von den Lernenden und der Lehrintention **abhängig**, ...
  - an eine **kommunikative** Situation gebunden,
  - einem bestimmten Ziel (**Lehrintention**) verpflichtet und...
  - muss entwickelt/kann immer weiter verbessert werden (**Entwicklungsbedarf, Optimierung**).

Messen ist keine GV, solange man Messen nicht mittels eines Ankers Lernenden derart nahebringt, dass diese „Messen“ in anderen Kontexten erkennen oder anwenden können. Der Anker gehört nicht konkretisiert zum Grundvorstellungsbegriff, aber der Begriff GV schließt die Bezogenheit auf eine (allgemein spezifizierte) Lerngruppe unter Verwendung eines (nur grundsätzlich beliebigen, aber sinnvollen) Ankers notwendig ein. Weiterhin dienen GV als Folie, auf der die Lehrkraft im Lernprozess die individuelle Begriffsentwicklung nachvollziehen, z. B. Fehlvorstellungen oder Verständnislücken **diagnostizieren** sowie einen Unterrichtsgang grob strukturieren kann.

### **Anschaulichkeit/Operativität**

- Die Anschaulichkeit ist nicht eng geometrisch aufgefasst, sondern als Verknüpfung von mehreren Repräsentations- und Handlungsmöglichkeiten. Es müssen nicht alle genannten Ebenen (Mustersituation, Handlungen, graphische Darstellung, Symbolisches, Operationen) verwendet werden.
- Die Verpflichtung zu einem (wenn auch austauschbaren) Anker ist eine Einschränkung, die der Inflation des Bezeichners »GV« entgegenwirken soll. Alternativen zu GV sind die Begriffe Grundbegriff, fundamentale Idee, Grundwissen, Grundfertigkeiten (Roth, J. & Siller, H.-S. 2013). Der Anker ist nicht eindeutig und wird i. Allg. immer weiter optimiert.
- Der Transfer des Ankers wird trainiert. Bei gegebener Anwendungssituation werden die Entsprechungen zum Anker und das Akzidentielle am Anker benannt. Nimmt man Anschaulichkeit und Adäquanz zusammen, so folgen möglichst große Einfachheit und Übersichtlichkeit der Darstellung für den Anker.

### **Fundamental**

Die Eigenschaft der Fundamentalität spaltet sich in mehrere Unterpunkte auf, die auch einzeln bedeutsam sind:

#### **Fachlich relevant**

- Wieder im Sinne einer Einschränkung des Begriffes GV sollte gegeben sein, dass der zugehörige Fachbegriffe in vielen weiteren Zusammenhängen der MINT-Wissenschaften auftritt und Weiteres auf diesem Begriff aufbaut.

#### **Didaktisch relevant**

- Wenn man die didaktische Situation in den GV-Begriff einbezieht, so gehört auch dazu, dass GV nur (!) an besonders relevanten Punkten im Unterricht eingesetzt werden sollten. Aus Lehrersicht in etwa: „Wenn man an diesem Punkt schludert, fällt es einem später auf die Füße.“ alias „Fehlendes Verständnis an dieser Stelle führt zu Verständnisbrüchen in späteren Phasen des Unterricht.“ Oder noch stärker: GV wirken immer typischen Schülerfehlern entgegen, die auf Fehlvorstellungen oder fehlende Vorstellungen verweisen. (Damit wäre z. B. „Zufallsvariable“ keine GV.)

Zur didaktischen Relevanz vgl. auch Salle & Clüver 2021, 569, insbesondere mit dem Einbezug empirischer Evaluation und Entwicklungsforschung.

#### **Kommunikativ relevant**

- Es ist nicht gemeint, dass irgendwelche Bezeichner übereinstimmen müssen, sondern dass man ohne eine gemeinsame Vorstellung zu diesen relevanten Begriffen nicht gemeinsam argumentieren kann. Diese Begriffsklärungskomponente stützt sich auf Bender 1991, 49, der sie in Analogie zu Krummheuers 1989 Auffassung von Veranschaulichung setzt: GVV „... sind erforderlich als sozial konstituierte [...] ‚Formate‘, über die individuelle Argumentation konstruiert werden kann, ...“

#### **Transferabel**

- Der Anker muss so unterrichtet werden, dass er (spezifisch) transferabel ist. Dies gehört m. E. zum „Grund“-Vorstellungsbegriff. Es geht nicht nur um Vorstellung des Ankers, sondern um ein Verständnis, das die Transferabilität von Bestandteilen des Ankers und Handlungen

an ihm einschließt sowie Akzidentielles ausblendet. Dieser Unterpunkt der Fundamentalität gehört durch den Ankerbezug auch zum vorherigen Punkt Anschaulichkeit.

### **Austauschbarer Anker als verpflichtender Bestandteil von GV**

- Da der Anker im Allgemeinen weiterentwickelt wird und auch zu einem gewissen Grade austauschbar ist, wird für eine GV nicht ein *konkreter* Anker verlangt, sondern nur, dass zum GV-Begriff unverzichtbar gehört, dass es einen Anker mit folgenden Eigenschaften *gibt*:
  - In jedem Unterricht, in dem die GV erarbeitet wird, ist er die eine, typische Anwendungssituation, die beim Aufbau der GV verwendet wurde, keine Metapher.
  - Seine Funktion besteht darin, dass die Lernenden neue Anwendungssituationen auf ihn beziehen können. Also Bestandteile in Analogie setzen und Handlungen übertragen können. Oder mit Verweis auf den Anker erkennen können, dass die Anwendungssituation nicht zur GV und damit zum Fachbegriff passt. Möglichlicherweise gibt es typische Veränderungen am Anker, die ihn zu einem Gegenbeispiel für den Begriff werden lassen. (Man könnte vielleicht von „**Grund-Gegenvorstellung**“ sprechen.)
  - Diese Transferkompetenz sollen Lernende geübt haben.
  - Es ist unbenommen, dass der spezielle, bei der Erarbeitung der GV verwendete Anker später bei den Lernenden wieder verblassen kann.

All dies wird verpflichtend verlangt, ohne dass eine GV auf einen bestimmten Anker festgelegt ist. Im GV-Begriff wird also vom Anker *abstrahiert*, der aber dennoch in der zugehörigen Lernsituation *konkret* vorliegen muss. Genauso wie der Begriff Personalausweis zwar nicht enthält, um welchen konkreten Menschen es sich handelt, aber sehr wohl, dass sich ein Ausweis auf einen bestimmten Menschen bezieht.

Diese vielleicht übertrieben ausführlichen Erläuterungen scheinen mir angebracht, da die Verpflichtung auf einen Anker, ja die Betonung der Lernsituation, einen wichtigen Bestandteil der hier vorgeschlagenen Begriffsklärung von GV darstellt.

*Work in Progress: Ich denke, dass es hier Widerspruch gegen den Begriffsklärungsvorschlag geben könnte, indem man anführt, dass der Begriff GV doch nicht von dem methodischen Vorgehen bei der Einführung der GV abhängen könne. Dagegen kann man halten, dass die Anschaulichkeit der GV es erzwingt, dass an konkreten Mustersituationen gearbeitet wird und diese in Bezug gesetzt werden. Ähnlich wie man beim Begriff Sportwagen auch an die Art der Nutzung denkt.*

### **Leitlinien des Vorschlags**

- **Vermeidung eines inflationären Gebrauchs**

Ich sehe die Gefahr der Beliebigkeit des Bezeichners »GV«, vgl. Rembowski 2015 zu „Aspekten“. Vielleicht ist er sogar derart schillernd, dass er kaum noch wissenschaftlich verwendbar ist, auch wenn er in der Unterrichtspraxis trotz (oder wegen?) seiner Unschärfe sehr brauchbar ist. In Ullmann 2015, Salle & Clüver 2021, 557, ferner angedeutet in Bender 1991, 53, findet sich eine didaktisch-historische Funktion des GV-Begriffes, die vielleicht den Begriff sogar allein ausmacht: u. a. einem kalkülorientierten, verständnislosen Mathematikunterricht entgegenzuwirken.

- **Perspektive auf die Unterrichtspraxis**

Es sollte einen begrenzten Kanon an GV geben, der möglichst allen Lehrkräften bekannt ist und der auch entsprechend unterrichtet wird. Auch für die intensive und nachhaltige Behandlung samt fortwährender Pflege (Grundwissen) im Unterricht ist es wichtig, einen inflationären Gebrauch zu vermeiden. Die Idee, zu jedem Begriff GV aufzubauen (Bender 1991, indirekt angedeutet in Salle & Clüver 2021), wird abgelehnt, indem nur fundamentale Begriff mit GV belegt werden.

## Was ist neu? Ist etwas neu?

Der Vorschlag zur Begriffsklärung auf S. 4 ist wenig originell und versteht sich als Schneise, als Schnitt durch die vielen verschiedenen Begriffsbilder der didaktischen community. Ich denke, dass ich hier vielleicht folgende **Aspekte neu zur Diskussion** beisteuere oder zumindest stärker betone:

1 Zu Grundvorstellungen gehört entscheidend die **Lernbezogenheit**, die potenzielle Umsetzung im Unterricht, als zwar selbstverständliche, aber für viele Einzelmerkmale ordnende und begründende Eigenschaft. Insbesondere (jeder einzelne Punkt und die Unterrichtsbezogenheit als solche sind nicht neu, wohl aber die Betonung.):

- die Berücksichtigung von Alter, Entwicklungsstand, Vorwissen, Schulart, Jahrgangsstufe, ...
- Existenz eines Ankers (einer paradigmatischen Mustersituation), an dem bei zusammengesetzten GV, diese zusammenfinden und an dem die mit der GV verbundenen Handlungen festgemacht werden können - Anschaulichkeit.
- die Transferabilität des Ankers auf andere Situationen, die beim Unterrichten der GV trainiert werden sollte und das Trainieren dieses Transfers, einschließlich dem Erkennen von nicht zur GV passenden Situationen.
- z. B. Emotionen und Einfachheit, Übersichtlichkeit als wichtige Elemente der GV, die im hier vorgeschlagenen Begriffsverständnis ja an einen Anker gebunden ist. Solche Emotionen erhöhen die Motivation und damit die Lernwirksamkeit.
- Didaktische Relevanz, z. B. Begegnung von typischen Fehlvorstellungen, kommunikative Relevanz.
- Sparsamkeit: Nicht jeder Begriff benötigt GV - wichtig um den Unterricht nicht zu überfrachten.

Dieser Punkt führt dazu, dass man *abstrakte* Vorstellungen, wie das Messen, von ihren Konkretisierungen in einer Lernsituation, die an einen **Anker** gebunden sind und auch das Transfertraining beinhalten, unterscheiden muss. Nur ein Begriff von Messen, der Ziel und Prozess eines Lernens von Relevantem zur Division einschließt, stellt eine Grundvorstellung dar. Aus einer Grundvorstellung ist die Funktion in einer Unterrichtssituation nicht zu entfernen. Ebenso wie der Begriff Auto unvollständig bleibt, wenn man nur an die Technik, aber nie an das Fahren denkt.

Diesen Gedanken findet man bereits in Bender 1991, 49: [In etwa: Der didaktische Entwicklungsprozess von GV] „... muss aber auch Vermittlungsfragen beachten“.

2 Es gibt nicht den einen richtigen GV-Begriff. Die von mir vorgeschlagene Begriffsklärung bezieht sich als einer unter vielen Möglichkeiten. Arbeiten, die diesen Bezeichner verwenden, sollten kurz klären, wie sie ihn verstehen. Neu ist lediglich das *Ensemble* meiner Entscheidungen (s. S. 1, 2 in blau) bei den in der Literatur zu findenden differierenden Kennzeichen:

- GV nur zu Fachbegriffen und für Jgst., Schulart, Entwicklungsstand, Vorwissen mit didaktischer Intention
- nur präskriptiv (alias normativ). Individuelle GV sollten »individuelle Vorstellungen« oder ggf. »Fehlvorstellungen« genannt werden.
- ohne Metaphern, stattdessen...
- nur mit Anker, der auch transferabel konzipiert ist
- nur dem Ziel verpflichtet, die Kompetenz in der Verwendung des Begriffs (geht über Bezeichner hinaus, ist hier in der Definition gleich Verständnis - Erkennen, Modellieren, Vernetzen) durch die Lernenden zu erhöhen. Also auf empirische Überprüfung hin angelegt (Salle & Clüver 2021).
- Durch die präskriptive Situation ergibt sich eine kommunikative Situation. Lehrkräfte und Didaktiker/innen als Sender entwickeln GV und Anker und Lerngelegenheiten zur (Ko-)Konstruktion so, dass die Lernenden als Empfänger möglichst gut die GV aufnehmen können. Dies ist keinesfalls als Aufforderung zu einem instruierenden Unterricht gemeint, im Gegenteil: Da GV von den Lernenden konstruktiv erworben werden, ist eine problemorientierte Unterrichtsausrichtung die Regel.
- Zu erwägen: nur zusammengesetzte GV?

3 Aus meiner momentanen Sicht müsste der Begriff GV in Richtung Fundamentalität noch ausgeschärft werden, so dass z. B. der Fachbegriff „Zufallsvariable“ eindeutig als Grundbegriff und nicht als einer Grundvorstellung bedürftig angesehen werden kann. (S. Nebenbemerkung auf S. 3.)

4 Es wurden die Begriffe bzw. Bezeichner „Kern“ (Bender), „Inhalt“ (Griesel, Blum, Kleine, Prediger), „Sinn“ (Greefrath et al, Vollrath), „Strukturgleichheit/-übereinstimmung“ (Griesel) vermieden und durch einen tendenziell operationalisierbaren, reduzierten Verständnisbegriff ersetzt.

## Begriffsklärung aus Bender 1991

Der Artikel Bender 1991 ist insgesamt zu betrachten, eine kurze griffige Definition erfolgt nicht. Folgende Passagen stellen eine Auswahl dar:

Der Wortbestandteil ‚Grund-‘ wird dreifach gedeutet als ...

- **Allgemeine Verbindlichkeit (48f)**  
Die Allgemeinheit versteht sich in Abgrenzung zu individuellen Vorstellungen. Die individuell „entstehenden Frames (Schemata)“ sollten „nicht allzu sehr vom epistemologischen Kern der Begriffe abweichen.“ (49). Dieser Kern besteht „aus einem ganzen System inner- und außermathematischer Zusammenhänge, das in einem langen und verwickelten didaktischen Forschungs- und Entwicklungsprozeß für das Lernen aufbereitet wird (siehe z. B. Bender & Schreiber 1985). Dieser Prozeß hat eigentlich nie ein Ende. Er ist zwar primär stofforientiert, muß aber auch Vermittlungsfragen beachten und hat daher eine ausgeprägt hermeneutische Natur.“ (49)  
„Aus psychologischer Sicht stellt sich der epistemologische Kern (verkürzt ausgedrückt) als das Gemeinsame der Frames aller Beteiligten dar (vgl. etwa Dörfler 1988: 65)“ (49), die ebenfalls nicht zu sehr von einander abweichen sollten.  
„GVV [...] sind erforderlich als sozial konstituierte ‚Formate‘, über die individuelle Argumentation konstruiert werden kann.“ (49)
- **Verankerung in der Lebenswelt (49f)**
- **fundamentaler Charakter für das jeweilige Teilgebiet (51f)**  
„Die GVV liefern damit zusätzlich zur fachlichen Systematik, aber durchaus in engem Zusammenhang mit dieser, eine etwas informellere Struktur, die den Schülern die Konstruktion adäquater Frames erleichtern soll, indem sie einerseits den Aufbau des Gebiets festigt, andererseits Möglichkeiten zu intuitivem, divergentem, assoziierendem Denken eröffnet und zugleich kanalisiert.“ (51)  
Unter dieser Überschrift „fundamentaler Charakter“ wird auch mittels der eher losen Anknüpfung an einen hierarchischen Aufbau des Begriffsnetzes beschrieben, wie Frames nach Dörfler verinnerlicht werden: „Er [Dörfler (1988)] sieht ‚das mathematische Konstrukt [ ... ] als nicht [ ... ] aus der Handlung herauslösbar [ ... ], sondern es tritt konstruktiv-integrativ zu ihr hinzu‘ (S. 55). Einerseits ist die reine mathematische Beziehung selbst nicht wahrnehmbar, sondern muß mit Hilfe der Handlung(svorstellung) erschlossen werden, andererseits steuert ihre Antizipation die Handlung(svorstellung) durch Aktivitäten wie die Interpunktion (eine Art Setzen von Marken), die Fokussierung oder auch Verlagerung der Aufmerksamkeit (S. 74f).“ (51)

Vorstellungen sind ... (52)

„(innere) anschauliche Repräsentationen eines Objekts, einer Situation, einer Handlung usw., deren sensorische Grundlagen im Langzeitgedächtnis gespeichert sind und die in bewußten Prozessen aktiviert werden. Dabei wird ein solcher Prozeß auf einen bestimmten Sinn hin organisiert, den der Vorstellende schon als Ziel mit einbringt (siehe Bosshardt 1981). Dieser konstituierende Beitrag von Sinn weist bereits darauf hin, daß Vorstellen ohne Verstehen (!) unmöglich ist“ (52) - und umgekehrt (55).

Verstehen ist ... (55)

„mit Seiler (1984) [...] Ausbildung bzw. Aktivierung von begrifflichen Strukturen (Frames), Einordnen in diese Strukturen und deren mögliche Veränderungen“; Verständnis ist das Produkt des Verstehens.

Denken in zwei Modi

Für das Lernen ist eine „dauernde Übersetzung zwischen [den] Modi“ (bildhaften/analog versus verbal/propositional) wesentlich (52f). „Man könnte die Rolle der GVV in einer Art prophylaktischem Gegengewicht gegen ein später stärker propositionales Vorgehen sehen.“ (53)

Merkmale von GVV: u. a. Metaphern/Einkleidungen (56), nicht verfälschend (56).

## Bemerkungen und Vergleich mit der Def. auf S. 4

Statt Begriffsfeld und Begriffskonvention nutzt Bender das Konzept der „frames“ und hat soziale Prozesse dabei im Blick. Mit „prophylaktischem Gegengewicht“ (53) nimmt er wie Ullmann 2015 und Salle & Clüver (2021, 557) eine didaktisch-historische Sicht auf GV alias GVV ein. Alle Bestandteile der Def. S. 4 finden sich in dem zwölfseitigen Text, wenn auch in verschiedener Gewichtung und Ausprägung. Ein Anker auf Lerngruppenebene gibt es z. B. nicht.

### **Begriffsklärung aus vom Hofe 1995, 97f (Schreibung unkorrigiert übernommen):**

„Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. "Verinnerlichungen", die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.

Grundvorstellungen erscheinen also als Elemente der Vermittlung bzw. als Objekte des Übergangs zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffswelt des Lernenden.“

### **Vergleich zur Definition auf S. 4:**

- **Sinnkonstituierung und Anknüpfung** an den Lernenden Bekanntes ergibt sich aus den ersten beiden Punkten auf S. 4: Funktion und Adäquanz von GV.
- **Repräsentationen/operatives Handeln** entspricht Anschaulichkeit/Operieren (3. Punkt S. 4).
- **Anwendung** (Erkennen, Modellieren) ergibt sich aus dem Verständnisbegriff (1. Punkt S. 4).

Dass die „GV-Idee“ Beziehungen im oben zitierten Sinn beschreibt, sehe ich nicht; GV als Elemente der Vermittlung halte ich für angemessen formuliert. Anker und Transferabilität, Fundamentalität/Relevanz fehlen.

Bei Ullmann 2015, 14, findet man die Fußnote „In der Tat lassen sich – eine gutwillige Lektüre vorausgesetzt – bereits bei Pestalozzi, vom Hofes frühestem Gewährsmann, alle drei Aspekte finden und (als didaktische Fingerübung) sogar ‚Kopf, Herz und Hand‘ oder, wie es im Original heißt: ‚Herz, Geist und Hand‘“ (vgl. etwa Pestalozzi 1819, S. 39 & 40) zuordnen“.

Man vergleiche auch die Bemerkung von Klafki 1958, 14, zu Gehalt und dem Problem des Elementaren bei Pestalozzi - siehe unten S. 12. Diese Bemerkung ist ein doppelt belegtes Beispiel dafür, an wie vielen Stellen der Grundvorstellungsbegriff in der Didaktik angebunden werden kann. Es besteht die Gefahr, dass er durch Überdeutung gesprengt und in seiner Wirkung verblassen könnte. Dies ist die Motivation für die Entscheidungen in der Begriffsklärung auf S. 4, ihn möglichst eng zu fassen.

## Begriffsklärung aus Roth & Siller 2016 (3, kein Fettdruck im Original, Schreibung leicht korrigiert)

„Grundvorstellungen repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und ermöglichen Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen.“ Grundvorstellungen „haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen aus dem Unterricht oder dem Alltag“ (primäre GV) oder „werden, insbesondere bei komplexeren mathematischen Zusammenhängen, mit mathematischen Darstellungsmitteln (Zahlenstrahl, Koordinatensystem, Graph, Term ...) repräsentiert und durch (gedankliche oder reale) Operationen mit ihnen erworben sowie vertieft.“ (sekundäre GV)

„... drei Aspekte [sind] wichtig:

- Sinnzusammenhänge herstellen, durch Anknüpfen an bekannte (inner- und außermathematische) Situationen oder Handlungsvorstellungen.
- Visuelle Repräsentationen aufbauen, die mentales Operieren mit ihnen ermöglichen und als **Verständniskerne** dienen können.
- Anwenden auf die Wirklichkeit, indem die entsprechende mathematische Struktur in Sachzusammenhängen erkannt oder beim Modellieren genutzt wird.“

„Normative Grundvorstellungen sind [...] Bezugspunkte für einen auf inhaltliches Verstehen ausgerichteten Unterricht.“

## Bemerkungen zum Begriff Kern

„Verständniskern“ findet sich (neben Kirsch 1977, Vollrath 1991 und beim Thema Fundamentale Ideen) bei Bender 1991, der auf Dörfler verweist: Kern als Schnittmenge der Frames von Individuen (Bender 1991, 49)

„Als Lehrer muß ich mich darum bemühen, daß die entstehenden Frames (Schemata) nicht allzu sehr vom epistemologischen Kern der Begriffe abweichen. Dieser Kern wiederum besteht keineswegs nur aus einer mathematischen Definition (insofern erscheint mir Vinnars - z. B. 1983 - Gegensatzpaar „concept definition vs. concept image“ zu eng), sondern aus einem ganzen System inner- und außermathematischer Zusammenhänge, das in einem langen und verwickelten didaktischen Forschungs- und Entwicklungsprozeß für das Lernen aufbereitet wird (siehe z. B. Bender & Schreiber 1985). Dieser Prozeß hat eigentlich nie ein Ende. Er ist zwar primär stofforientiert, muß aber auch Vermittlungsfragen beachten und hat daher eine ausgeprägt hermeneutische Natur. Insbesondere führt er (schon von seiten des Stoffes her!) nicht zu einem eindeutigen Begriff.“

„Aus psychologischer Sicht stellt sich der epistemologische Kern (verkürzt ausgedrückt) als das Gemeinsame der Frames aller Beteiligten dar (vgl. etwa Dörfler 1988: 65 ). Jedoch auch bei diesem Verständnis bleibt m. E. das Ziel der möglichst weitgehenden Übereinstimmung der Frames mit ihm voll erhalten.“

Bei vom Hofe 1995 tritt »Kern« unerläutert auf (123, 125, kursiv im Original, grammatikalisch leicht korrigiert):

„Grundannahme des hier vertretenen Konzepts ist es, daß sich durch die Umsetzung der didaktischen Kategorie entsprechende individuelle Erklärungsmodelle ausbilden lassen, die - bei allen subjektiven Schattierungen - einen gemeinsamen Kern haben, oder kurz: *daß sich Grundvorstellungen ausbilden lassen.*“ „Grundlage solcher Schritte kann dann der Schüler langfristig die entsprechende *Grundvorstellung aufbauen*, sie in das System seiner Erklärungs- und Handlungsmöglichkeiten integrieren und - in einem seinen individuellen Bedingungen entsprechenden Ausmaß - am *Kern des mathematischen Begriffs* teilhaben, d.h. diesen *"verstehen"*.“

Bei Salle & Clüver 2021, Bsp. S. 575, sind Kernelemente allgemeine Bestandteile eines Konstruktes („Klasse“ nach Clusterung, ähnlich wie bei einer induktiven QIA). Dies passt zur Schnittmengenvorstellungen von Kern, aber nicht dazu, dass der Kern entscheidend für den Begriff ist, siehe dazu...

Kurz angemerkt: Hinweis auf Müller-Hill 2017

Der »Kern« von etwas ist für die Funktion (etwa einer Frucht) entscheidend. GV dienen wie die Erklärung dem Verständnis. Eine Theorie „entscheidender Gründe“ beim Erklären findet sich bei Müller-Hill 2017, („entscheidend“ auf S. 167), und könnte zur Adäquanz (im Sinn von schülerorientierter Prägnanz des Ankers) und der Fundamentalität einer GV (im Gefüge weiterer Begriffe) möglicherweise einen Beitrag leisten.

## Vergleich zur Begriffsklärung auf S. 4

- Die Anwendungssituation wird betont, was dem operationalisierten Verständnisbegriff auf S. 4 (1. Punkt) entspricht. Zusätzlich werden die Bezeichner „Kern“ und „Inhalt“ verwendet.
- Die Adäquanz und Bezogenheit auf die Lernsituation wird ausgeführt. Dabei wird die Ankeridee sinngemäß beschrieben.
- Die Fundamentalität findet sich nur kurz angerissen durch das Wort „Bezugspunkte“. Ansonsten könnte diese Begriffsklärung auch auf Bezeichner wie z. B. »Zähler« oder »Lotfußpunkt« Anwendung finden, die m. E. nicht fundamental sind.

## **Begriffsklärung aus Salle & Clüver 2021, 556f**

### **- Sinnkonstituierung mathematischer Begriffe (556)**

Grundvorstellungen ist eine „inhaltliche Deutung mathematischer Begriffe (Greefrath et al. 2016a, 2016b; vom Hofe 1995) [inhärent]. Grundvorstellungen leisten somit einen Beitrag zu einem sinnstiftenden Mathematiktreiben, indem sie auf Anwendungen der Begriffe, auf die historische Begriffsgenese und auf fundamentale Ideen Bezug nehmen (Leuders et al. 2011; Vohns 2005). Insbesondere sollen Grundvorstellungen den Lernenden eine Sinnkonstituierung der Begriffe durch eine entsprechende Anknüpfung an deren Vorwissen ermöglichen (vom Hofe 1995)“.

### **- Anknüpfung an analysierte Phänomene/mentales Operieren (vgl. 557)**

GV sollen „über die Anknüpfung an verschiedene Handlungen und Operationen ein ‚operatives Handeln auf der Vorstellungsebene‘ (vom Hofe 1995, S. 98) ermöglichen [...]. Über die ‚Verinnerlichung‘ von Handlungen im Piagetschen Sinne sollen die Lernenden befähigt werden, flexibel mit gedanklichen Konstrukten zu arbeiten. Dies steht in enger Verbindung mit dem beweglichen Denken nach Roth (2005, S. 38), bei dem es ebenfalls um ‚das bewusste, aktive Verändern einer evtl. zunächst statischen Konfiguration einschließlich der Reflexion der Konsequenzen dieser Veränderung‘ geht.“

### **- Anwendung (557, 568)**

„Durch die sich in Grundvorstellungen widerspiegelnde inhaltliche Deutung mathematischer Begriffe sowie deren Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungssituationen nehmen sie eine Vermittlungsfunktion bei Übersetzungsprozessen ein (Stölting 2008; vom Hofe und Blum 2016).“ Dies zeigt sich im „Modellierungskreislauf“ und „beim Übersetzen von einer Darstellung in eine andere“.

S. 568: „... Sinnkonstituierung des Begriffs ermöglichen (erste Eigenschaft). Durch die Anknüpfung der Definitionen an analysierte Phänomene wird bedacht, dass die neuen Leitlinien zum mentalen Operieren auf Vorstellungsebene (zweite Eigenschaft) und zur Anwendung der mathematischen Objekte (dritte Eigenschaft) befähigen sollen.“

### **- Rolle der Empirie bei Entwicklung und Evaluation von GV (u. a. 563, 569)**

## **Vergleich zur Definition auf S. 4:**

- Sinnkonstituierung ergibt sich aus Funktion und Adäquanz (1. & 2. Punkt S. 4). Der Inhaltsbegriff wird ebenso wie „Strukturübereinstimmung“ auf S. 4 als zu unklar vermieden.
- Anknüpfung an Analysiertes und mentales Operieren findet man im 3. Punkt Anschaulichkeit/Operieren
- Anwendung im Verständnisbegriff und Transferabilität auf S. 4.

Zur Fundamentalität findet man z. B. auf S. 556 unter Betrachtungen zum „Idealtypischen“ der GV die Idee der Strukturübereinstimmung einerseits zwischen mathematischem Konstrukt und GV, andererseits zwischen Anwendungssituation und GV. Dies verlangt zumindest Transferabilität und die Relevanz im Sinne von allgemeiner Anwendbarkeit zeichnet sich ab. Die Formulierung „Anknüpfung an analysierte Phänomene“ deutet den Anker an.

## **Vergleich zur Definition von vom Hofe 1995**

Die Überschriften finden sich sehr ähnlich im Text von Salle & Clüver eingearbeitet, werden aber deutlich weiter ausgeführt.

## Übersehen: Begriffsauffassung bei Klafki 1958 anschließend an Willmann 1882

Prediger, Greefrath u. A. beziehen sich bei GV auf den Bezug von „Inhalt“ zu „(math.) Begriff“/„Objekt“/„Konstrukt“. Ein Grund weshalb der Begriff „Inhalt“ auf S. 4 vermieden wurde, liegt darin, dass er sowohl komplex als auch wenig geläufig ist. Er führt ins Herz der bildungstheoretischen Didaktik, die kaum noch rezipiert wird, jedoch bereits sehr früh etliche Merkmale von Grundvorstellungen vorweggenommen hat, ja sogar bis hin zum Bezeichnerbestandteil „Grund-“. Auch wenn die Terminologie nicht ganz zu der Literatur ab 1990 passt, so sind diese Quellen doch in ihren Aussagen für den GV-Begriff wertvoll.

Wenn man das Wort „Inhalt“ im Kontext von Bildung verwendet, so reicht dieser Begriff weit zurück<sup>2</sup>: Bereits Otto Willmann 1882 hat sich damit intensiv beschäftigt und ihm den Begriff „Gehalt“ gegenübergestellt.

„Wir unterscheiden von dem Gesamtgehalt eines Lehrgegenstandes dessen *Bildungsgehalt* und verstehen unter dem letzten eben die Teile und Momente des ersteren, von welchem dessen Bewurzelung und Verinnerlichung ausgeht, und von deren Haften und Nichthaften der Wert des Lernens und Übens wesentlich abhängt. Auf dieses Verhältnis muß der Unterricht Rücksicht nehmen und die abgestufte Bedeutung des Lehrinhaltes im Auge behalten. Die Maxime: *Lehre so, dass das Gegebene gelernt werde*, ist darum durch den Zusatz zu erweitern: *und dass dessen Bildungsgehalt zur Geltung komme*“ (Willmann 1882/1909, 326, Hervorhebungen im Original).

Im Kontext interpretiere ich den im Spannungsfeld von materialer und formaler Bildung verwendeten Begriff „Gesamtgehalt“ als *Lehrinhalte* samt ihrer Bezüge untereinander, von dem sich der Bildungsgehalt noch einmal absetzt. Diese Sicht wird durch die Verwendung von „Lehrinhalt“ im weiteren Verlauf des Zitates gestützt.

Weiterhin findet man in Klafkis Dissertation (1957) und zugänglicher für die Unterrichtspraxis aufbereitet im einflussreichen Aufsatz „Die didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung“ (1958, überarbeitet 1963) eine Beschreibung von einem Begriff, der dem der Grundvorstellung sehr nah kommt. Als Bezeichner finden sich „Grundprobleme, Grundverhältnisse, Grundmöglichkeiten, allgemeine Prinzipien, Gesetze, Werte, Methoden“ (so eine Aufzählung auf S. 14) und im ganzen Kontext:

Es charakterisiert einen Bildungsinhalt, daß er als einzelner Inhalt immer stellvertretend für viele Kulturinhalte steht; immer soll ein Bildungsinhalt Grundprobleme, Grundverhältnisse, Grundmöglichkeiten, allgemeine Prinzipien, Gesetze, Werte, Methoden sichtbar machen. Jene Momente nun, die solche Erschließung des Allgemeinen im Besonderen oder am Besonderen bewirken, meint der Begriff des Bildungsgehaltes. Jeder besondere Bildungsinhalt birgt in sich also einen allgemeinen Bildungsgehalt.“ (Klafki 1958, 14, Verweis auf Petzold 1947, 78.)

### Vergleich mit der Begriffsklärung auf S. 4

Man kann m. E. Gehalt als Grundvorstellung interpretieren und den speziellen Inhalt, an dem dieser Gehalt exemplifiziert wird, als Anker.

Der Begriff Gehalt geht allerdings weiter bis hin zur gesellschaftlichen Relevanz, da er allgemein-didaktisch konzipiert ist. Dennoch nutzt Klafki als Beispiel sogar ein mathematisches: Die Winkelmessung, wo er (sinngemäß) die Bewegung als Grundvorstellung herausstellt. Dass das Beispiel didaktisch nicht völlig überzeugt (zu Bewegung und Geometrie vgl. auch Bender 1991), ist für die hieran ausgeführte Begrifflichkeit unerheblich, sondern zeigt die in den letzten Jahren nochmals stärker betonte Stellung der Fachdidaktiken. „Bildungsgehalt“ wäre vielleicht der Grundvorstellungsbegriff ohne Anker.

Mit dem Wortbestandteil „Bildungs-“ weist Klafki immer wieder darauf hin, dass soziale Prozesse entscheidend sind: Der Inhalt ist durch Vorentscheidung ausgewählt (S. 8) und auf Lernende bezogen, sogar mit so viel Respekt, dass herausgestellt wird, dass man noch gar nicht wissen könne,

<sup>2</sup> Klafki verknüpft weiterhin in Fußnote 17 auf S. 14 Bildungsgehalt mit dem Problem des Elementaren bei Pestalozzi (1746-1827).

was für die Jugendlichen relevant werden wird. Damit findet sich der **Lernbezug/die Adäquanz** in der doppelten Relativität des Bildungsinhaltes und -gehaltes:

„Was ein Bildungsinhalt sei oder worin sein Bildungsgehalt oder Bildungswert liege, das kann erstens nur im Blick auf bestimmte Kinder und Jugendliche gesagt werden, die gebildet werden sollen, und zweitens nur im Blick auf eine bestimmte, geschichtlich-geistige Situation mit der ihr zugehörigen Vergangenheit und der vor ihr sich öffnenden Zukunft.“ (Klafki 1958, 12, bezugnehmend auf H. Nohl und E. Weniger).

Die erste Relativität ist die der **Adäquanz** zu den Lernenden. Die zweite ist hier sehr offen formuliert und erschließt sich erst im Folgenden (Klafki 1958, 12f) u. a. als Lehrintention sowie Stiftung kultureller Kontingenz und weitere der späteren Heymannschen Allgemeinbildungsaspekte.

**Anschaulichkeit** findet sich in einer der Leitfragen für die Unterrichtsvorbereitung auf S. 21, und zwar, wie ebenfalls auf S. 4, dritter Punkt, weiter gefasst bis hin zu Operationen und sogar mit sinnvollen methodischen Implikationen wie dem problemorientierten und genetischen (was wieder auf Willmann führt) Unterrichtsstil:

„Welche Anschauungen, Hinweise, Situationen, Beobachtungen, Erzählungen, Versuche, Modelle usw. sind geeignet, den Kindern dazu zu verhelfen, möglichst selbständig die auf das Wesentliche der Sache, des Problems gerichtete Fragestellung zu beantworten?

Die prinzipielle Antwort auf diese Frage läßt sich mit den Stichworten ‚Modellcharakter des elementaren Falles‘ (Roth)<sup>FN</sup> oder ‚Fruchtbarkeit des Elementaren‘<sup>FN</sup> andeuten. Bei allen Inhalten, die selbst das Ergebnis eines gedanklichen Entwicklungsprozesses sind, ist das Prinzip der „Rückführung in die Ursprungssituation“, das hier nicht eigentlich den geistesgeschichtlichen, sondern den systematischen Ursprung meint und das wir eben als die Weise kennenlernten, echte Problemfragen bei den Kindern zu wecken, zugleich die rechte Form der adäquaten Veranschaulichung.“ (Klafki 1958, 21, Fußnoten (FN) nicht zitiert)

Mit dem „Modellcharakter“ und dem „Wesentliche[n]“ (hierzu ausführlichst auch Willmann und viele andere) wird auf die **Fundamentalität** (vierter Punkt auf S. 4) hingewiesen.

Diese Stelle zeigt m. E. auch, wie nah Klafki am Grundvorstellungsbegriff ist, wie weit er aber auch gerade mit dem Bezug auf didaktische Traditionen darüber hinausgeht. Auch die immer neue sprachliche Umschreibung der unterrichtlichen Situation reichert den Begriff GV an, zeigt vielleicht auch die ein oder andere zusätzliche Perspektive auf, sie schärft den Begriff aber nicht unbedingt aus. Vor dem Hintergrund, dass viele neuere Begriffserklärungen von »GV« ebenfalls nicht übereinstimmen und ihrerseits zentrale Begriffe ungeklärt lassen, ist m. E. Klafki durchaus als weiterer, früher Beitrag zum Grundvorstellungsbegriff zu betrachten. In seiner Formulierung zeigt sich weiterhin, wie nah die Diskussion um exemplarisches Lehren und Lernen (Wagenschein 1968) der Diskussion um GV ist. Ein Anker für einen mathematischen Begriff ist im Allgemeinen zwar weniger komplex als das Exemplarische, das Wagenschein im Sinn hat, und auch die Funktion der Begegnung der Stofffülle fehlt, aber das gründlichere Verständnis im Besonderen ist enthalten. Darüber hinaus mag man die Begrifflichkeiten der bildungstheoretischen Didaktik als zu unklar ablehnen. Hierzu ist wie bei Griesel et al. 2019 im Hinblick auf ontologische Positionen zum GV-Begriff zu sagen: Man kann aus mehreren Perspektiven einen Blick auf GV werfen: Als Empiriker/in würde man vll. andere Begriffsklärungen bevorzugen als als Bildungstheoretiker/in. In beiden Fällen gibt es Gruppen, die die zugehörige Argumentationsbasis teilen, sich verstehen und Unterrichtsrelevantes kommunizieren können.

Sogar die Rolle der GV für die Unterrichtsgestaltung findet frappierende Parallelen in der neueren Diskussion:

Klafki 1958, 14: „Die didaktische Analyse soll ermitteln, worin der allgemeine Bildungsgehalt des jeweils besonderen Bildungsinhaltes liegt.“ - Konkretisierung in „fünf didaktische[n] Grundfragen“  
 Bender 1991, 48: „[...] Didaktisches Prinzip [...]: Bilde in jedem Gebiet geeignete GVV aus.“  
 Salle & Clüver 2021, 576: „Verfahrensrahmen für die Herleitung von Grundvorstellungen“ in 5 Schritten.

## Kurze Begriffsklärungen mehrerer Autor/innen

„Die GVV liefern damit zusätzlich zur fachlichen Systematik [...] eine etwas informellere Struktur, die den Schülern die Konstruktion adäquater Frames erleichtern soll [...]“ und zeichnen sich u. a. durch „Allgemeine Verbindlichkeit, Verankerung in der Lebenswelt, fundamentaler Charakter für das jeweilige Teilgebiet“ aus.  
(Bender 1991, 48)

„Elemente der Vermittlung [...] zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffswelt des Lernenden“  
(vom Hofe 1995, 98)

„Begriffe [müssen] in Alltagsvorstellungen und -verständnissen gründen, angesiedelt in mehr oder weniger realistischen Situationen mit genuinen Anwendungen bis hin zu spielerischen, märchenhaften Problemen“ sein - kein „formalistisches, sinnfreies Tun“  
(Bender 1997, 32)

„[GV sind] inhaltliche Interpretationen mathematischer Objekte und ermöglichen, mathematische Begriffe oder Operationen zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen“  
(Prediger 2009, 218).

- Mit einem Vorverständnis von „inhaltlich“ für die Praxis gut nutzbar! Prediger verweist dabei auf die folgende Abb. aus vom Hofe 2003, 5:

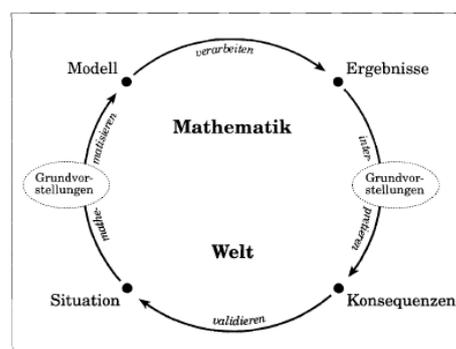


Abb. 1: Modellierungsprozess

„Eine Grundvorstellung [...] ist eine inhaltliche Deutung des Begriffes, die diesem Sinn gibt.“  
(Greefrath et al. 2016; bzgl. „Sinn“ wird auf Vollstedt 2012 verwiesen).

„Grundvorstellungen repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und ermöglichen Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen. [...] Um den Aufbau und die Vernetzung adäquater Grundvorstellungen zu fördern, sind drei Aspekte wichtig: Sinnzusammenhänge herstellen, [...] Visuelle Repräsentationen aufbauen, [...] Anwenden auf die Wirklichkeit“  
(Roth & Siller 2016, 3)

„Grundvorstellungen sind nämlich mentale Repräsentationen mathematischer Objekte und Sachverhalte (und damit gedanklicher Konstrukte).“  
(Griesel et al. 2019, 128, bzgl. Repräsentation und Konstrukt wird auf Lorenz 2017 verwiesen)

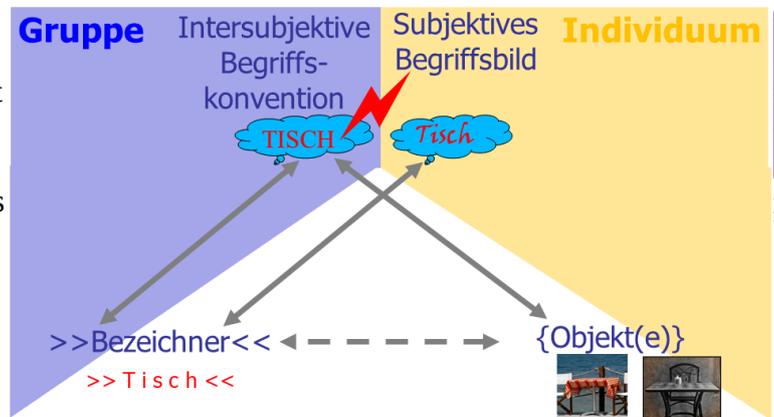
Sinnkonstituierung – Ermöglichung von operativem Handeln auf Vorstellungsebene – Ermöglichung von Anwendungen (Modellieren: Mathematisieren und interpretieren)  
(Salle & Clüver 2021, 556f, vom Hofe 1995, 97f, vgl. Rembowski 2015)

## Illustration und Vorschlag für eine verfeinerte Theorie zur Verortung und Genese von Grundvorstellungen

Man beachte auch die zum Teil detaillierten Kommentare zu den Folien im Vortrag (Datei GDM\_FFm2022\_StochGV\_Folien\_kommentiert\_v19.pdf).

Zwischen dem Begriff, den sich einzelne Lernende machen und dem etablierten Begriff besteht ein Unterschied (angedeutet in der Schriftart von Tisch). Die Bezüge des subjektiven Begriffsbildes zu den Objekten sind unsicher oder anfangs gar nicht vorhanden.

Abb. 1 Konflikt zwischen Begriffsbild und Begriffskonvention



Grundvorstellungen sollen dieser Diskrepanz abhelfen. Sie vermitteln zwischen der Begriffskonvention und dem individuellen Begriffsbild und haben als Ziel, das subjektive an das intersubjektive Begriffsbild (das wegen seiner Akzeptanz in einer Gruppe als Begriffskonvention bezeichnet wird) anzugleichen.

Abb. 2 Funktion der GV im Verhältnis Sender-Adressat: Angleichung

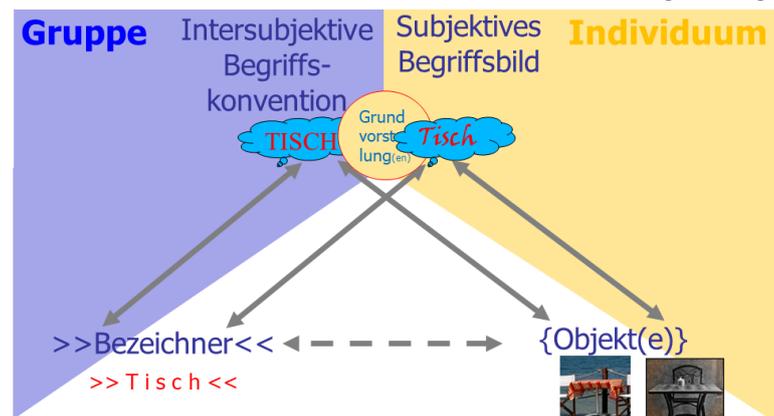
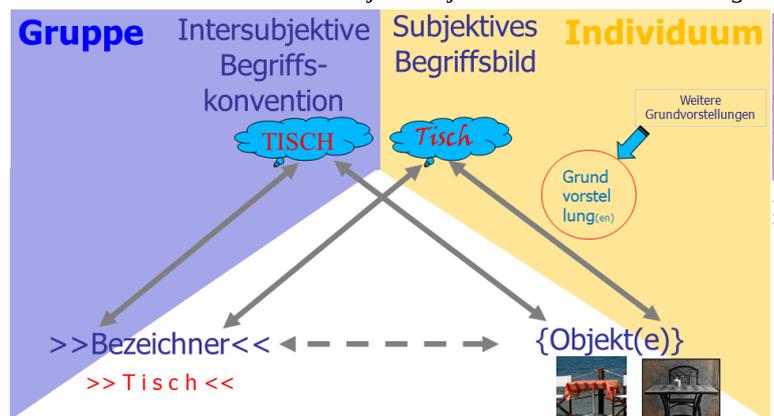


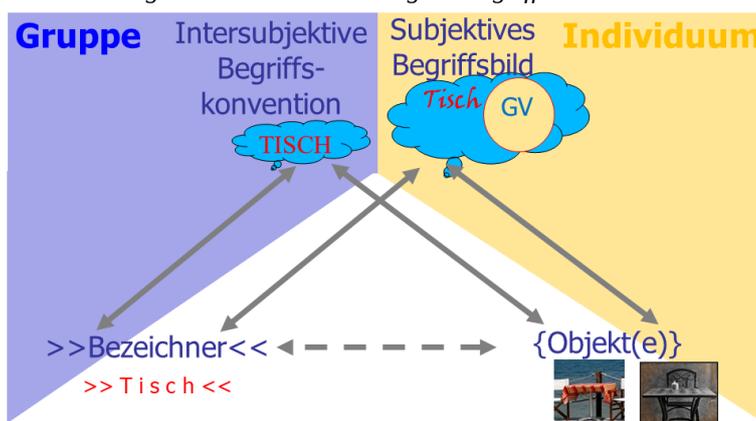
Abb. 3 Funktion der GV im Subjekt-Objekt-Verhältnis: Vermittlung



Wenn die Grundvorstellung im lernenden Individuum verinnerlicht ist, dann vermittelt sie zwischen ihm und den Objekten (und hierdurch auch zwischen ihm und der Gruppe). Im Allgemeinen basieren GV auf weiteren GV. Die Objekte sind im allgemeinen nicht nur Elemente einer Klasse, sondern auch Anwendungssituationen: Z. B. Tischstatik, Zusammenbrechen eines Tisches, Wackeln eines vierfüßigen Tisches usw. All dies führt auf Bestandteile eines ausgereiften Begriffes von »Tisch«.

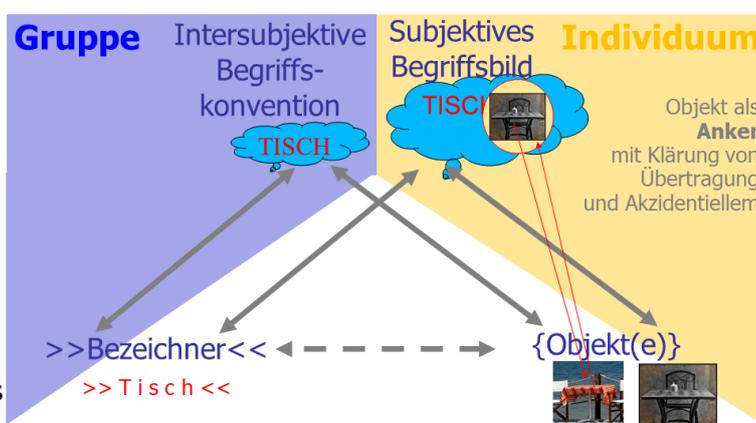
Die Grundvorstellung wird durch Unterricht in das subjektive Begriffsbild der Lernenden integriert. Dies ist ein längerer Prozess.

Abb. 4 Integration der GB in das eigene Begriffsbild



Dieser geschieht effektiv durch einen Anker, einem besonderen Beispiel, das geeignet ist, an ihm den allgemeinen Begriff, seine Bestandteile und seine Struktur zu sehen und zu verstehen. Die roten Pfeile deuten an, dass man die Bestandteile zuordnen kann und Handlungen/Operationen am bzw. Strukturen im Anker jetzt auch am/im Objekt erkennen bzw. übertragen kann. Genauso wichtig ist die Kompetenz, erstens Akzidentielles am Anker zu erkennen und nicht zu übertragen und zweitens Objekte, die nicht zur GV passen, als solche zu identifizieren (Gegenbeispiele, ähnliche, aber ungleiche Strukturen erkennen. Typische Gegenbeispiele könnte man vielleicht „Grund-Gegenvorstellungen“ nennen). Wie in Abb. 5 mit der Schriftart ange deutet, hat sich das Begriffsbild der -konvention angeglichen.

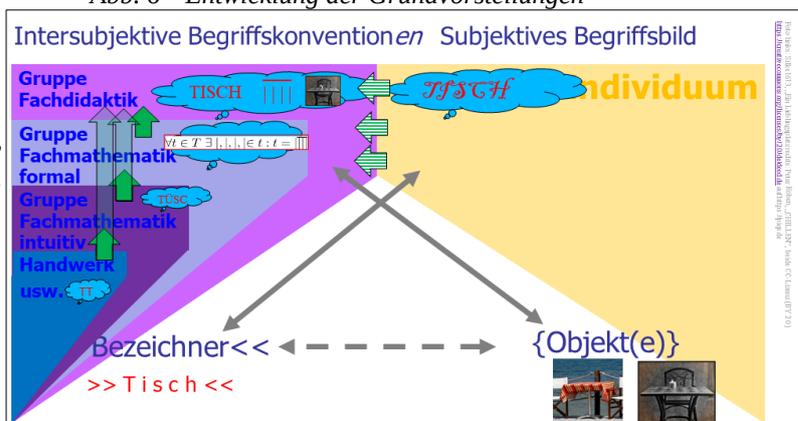
Abb. 5 Anker



### Wie entstehen Grundvorstellungen?

Bereits in der community der Fachmathematiker/innen bestehen zwei Sichtweisen auf Begriffe: eine intuitive, reichhaltigere, informellere, anschaulich-metaphorische Sicht und eine logische, formale, deduktiv-analytische (vgl. Hadamard<sup>3</sup>). Man kann diese Sichtweisen als die verschiedener sozialer Gruppen ansehen, obgleich sie dieselben Mitglieder haben. Menschen sind gut in der Lage, Kulturen zu wechseln.

Abb. 6 Entwicklung der Grundvorstellungen



Und sich als Mitglied einer Kultur anders zu verhalten als in einer anderen. Die historische Genese des Ableitungsbegriffes, des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, des Mengenbegriffes usw. zeigt jeweils, dass es ein intensives Wechselspiel zwischen diesen Kulturen/Gruppen/Sichtweisen gab. Und auch die informelle Sichtweise entstand im Wechselspiel vielleicht mit einer Handwerkskultur oder mit Begriffsbildern einzelner. Die Fachmathematik hat sich so entwickelt, dass die deduktiv-analytische

3 Hadamard 1945, z. B. 128ff. Der grobe Gegensatz intuitiv - logisch wird dort viel differenzierter ausgeführt.





## Literatur

Diese Liste stellt kein Verzeichnis der verwendeten Literatur dar, sondern eine Fundgrube, die durch die Zusammenfügung mehrerer Literatureinträge der Artikel entstanden ist. Deshalb ist sie auch nicht einheitlich formatiert. Verweise aus den Zitaten sind nicht enthalten. Ich bitte insgesamt um Verständnis. Anmerkungen in [] vom Autor.

- Bender, P. (1990) Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen, insbesondere der SII. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1990*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 73-76.
- Bender, P. (1991) Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen. In: H. Postel, W. Blum & A. Kirsch (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48-60). Hannover: Schroedel.
- Bender, P. (1997). Grundvorstellungen und Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule*, 17(1), S. 8-33.
- Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A., Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland* (S. 145–157). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Bruder, R. (2001): Mathematik lernen und behalten. *Pädagogik* 53(10), 15–18.
- Dörfler, W. (1984) Qualität mathematischer Begriffe und Visualisierung. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Band 9. (S. 44-64). Wien: Hölder-Pichler-Temsky.
- Dörfler, W. (1988a) Begriff als Tätigkeitsstruktur – Zur Unterscheidung vom empirischem und theoretischem Begriff. In: P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 29-36). Berlin: Cornelsen.
- Dörfler, W. (1988b) Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. In: W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Band 16*. (S. 55-125). Wien: Hölder-Pichler-Temsky.
- Etzold, H. (2021). *Neue Zugänge zum Winkelbegriff. Fachdidaktische Entwicklungsforschung zur Ausbildung des Winkelfeldbegriffs bei Schülerinnen und Schülern der vierten Klassenstufe*. Dissertation an der Universität Potsdam. <https://doi.org/10.25932/publishup-50418>
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-St., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis - Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Heidelberg: Springer Spektrum
- Griesel, H. (2016). Die Vergleichstheorie des Messens und ihre Anwendung in der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 5–30.
- Griesel, H., vom Hofe, R., & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 123–133.
- Hadamard, J. (1945). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press, Princeton. <https://archive.org/details/eassayonthepsych006281mbp>
- Hußmann, S. & Prediger, S. (2016). Specifying and structuring mathematical topics – a four-level approach for combining formal, semantic, concrete, and empirical levels exemplified for exponential growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(Suppl. 1), 33–67.
- Kant, I. (2004 – Erstausg. 1781) Kritik der reinen Vernunft. In: G. Mohr (Hrsg.): *Theoretische Philosophie. Text und Kommentar. Band 1. Kritik der reinen Vernunft*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Klafki, W. (1964). *Das pädagogische Problem des Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung*. Julius Beltz, Weinheim. <https://tudigit.ulb.tu-darmstadt.de/tmp/pdf/DF1009K63-3.pdf>
- Klafki, W. (1958). Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung. *Die Deutsche Schule*, 50 (1958), 450 - 471. Siehe zusammenfassend und zur Versionsgeschichte zusätzlich: Rosenbach, M. (letzter Stand 15.1.2008). *Didaktische Analyse - Urfassung und Wirkungsgeschichte*. <https://aseminar.schule.de/ziellenk/didatrans/urfassung.htm#1.1>
- Klafki, W. (1963). *Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Julius Beltz, Weinheim.
- Kleine, M. (2007) Analyse von Grundvorstellungen – Möglichkeiten und Grenzen –. In (o. Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26.3. bis 30.3.2007 in Berlin* (S. 183-186). Hildesheim: Franzbecker.
- Kleine, M., Jordan, A., & Harvey, E. (2005). With a focus on ‘Grundvorstellungen’ part 1: a theoretical integration into current concepts. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), 226–233.
- Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht, *DdM* 2 (1977), 87-101.
- Malle, G., & Malle, S. (2003). Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *mathematik lehren*, 118, 52–56.

- Padberg, F. (1989) *Didaktik der Bruchrechnung*. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.
- Padberg, F. (1996) *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum. 287
- Prediger, S. (2008) The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change. Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction* 18(1), 3-17.
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt, Siegbert (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I* (S. 213-234). Weinheim: Beltz.
- Prediger, S. (2015) Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 643-662). Berlin: Springer.
- Rembowski, V. (2012b) The Concept of Concept in Mathematics Education. *ICME-12: Preconference Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, TSG 37: Theoretical Issues in Mathematics Education* (S. 7112-7121). Seoul, Korea.
- Rembowski, V. (2016). *Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht. Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention und ihre Implikationen auf Grundvorstellungen*. Dissertation, Universität Saarbrücken.
- Rolfes, T. & Fahse, C. (2019). Zufallsphänomene erfassen: Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert und Variabilität. *mathematik lehren*, 213, 2–7.
- Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *mathematik lehren*, 199, 2-9. [ohne Nennung „Anker“]
- Roth, J. & vom Hofe, R. (erscheint 2023) (Hrsg.). *mathematik lehren*, 236. [mit Nennung „Anker“]
- Salle, A. & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, (42)2, 553-580.
- Siller, H.-S. & Roth, J. (2016) Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. In H.-S. Siller, J. Roth (Hrsg.), Herausforderung Heterogenität. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 70, 2-8.  
[https://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2016/siller\\_roth\\_2016\\_herausforderung\\_heterogenitaet\\_grundvorstellungen.pdf](https://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2016/siller_roth_2016_herausforderung_heterogenitaet_grundvorstellungen.pdf)
- Sträßer, R. (2015) Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzungen der Geometrie. In: M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen*. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (S. 1-11). Wiesbaden: Springer.
- Tall, D. (2003). *Concept Image and Concept Definition*. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image>.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
- Ullmann, P. (2015) Grundvorstellungen zur Schulgeometrie. „Situated Cognition“ in der Geometriedidaktik. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen*. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (S. 13-28). Wiesbaden: Springer.
- Vohns, A. (2005) Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematikdidaktik*, 26, 52-79.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Vollstedt, M. (2012). Zur theoretischen Konzeption und zu den Möglichkeiten der unterrichtspraktischen Umsetzung der Sinnkonstruktion. In: W. Blum, R. Borromeo Ferri, K. Maaß (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität*. Festschrift für Gabriele Kaiser (S. 148–156). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.
- vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, 118, 4-8.
- vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 225–254.
- von der Bank, M.-C. (2016). *Fundamentale Ideen der Mathematik - Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung*. Dissertation, Universität Saarbrücken.
- Wagenschein, M. (1968, 11. Aufl. 1997). *Verstehen lehren: genetisch – sokratisch – exemplarisch*. Pädagogische Bibliothek Beltz, Bd. 1. Weinheim: Beltz Verlag.
- Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. IPN Kiel. [http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material\\_aus\\_SGS/Handreichung\\_WarthaSchulz.pdf](http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf)
- Willmann, O. (1882). *Didaktik als Bildungslehre*. (Leipzig 1882, zitiert nach der 4. Auflage bei Vieweg: Braunschweig, 1909) <https://archive.org/details/didaktikalsbild00will/page/n29/mode/2up>
- Wittmann, E. (1981) *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.