Institut für Mathematik

Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

mit Lösungen

Gruppenwettbewerb	Aufgaben MG1, MG2, MG3, MG4
Speedwettbewerb	Aufgaben MS1, MS2, MS3, MS4, MS5, MS6, MS7, MS8

Aufgabe MG1:

In einer Stadt gibt es drei Parkplätze A, B, C.

(a) Zum einem bestimmten Zeitpunkt sind:

- 20% der Stellplätze auf Parkplatz A belegt
- 40% der Stellplätze auf Parkplatz B belegt
- 60% der Stellplätze auf Parkplatz C belegt
- damit die Hälfte aller verfügbaren Stellplätze insgesamt belegt

Auf Parkplatz C gibt es zu diesem Zeitpunkt genauso viele freie Stellplätze wie freie Stellplätze auf den Parkplätzen A und B zusammen.

Bestimmt die Anteile der Stellplätze auf den einzelnen Parkplätzen A bzw. B bzw. C an den Stellplätzen insgesamt.

(b) Zu einem anderen Zeitpunkt sind auf den gleichen Parkplätzen $\frac{5}{8}$ aller verfügbaren Stellplätze insgesamt belegt, wobei es auf jedem der drei Parkplätze genau gleich viele freie Stellplätze gibt.

Bestimmt für jeden der drei Parkplätze A bzw. B bzw. C jeweils den Anteil der Stellplätze, die belegt sind.

Lösung MG1:

Seien a, b, c die Anzahl der Stellplätze auf den Parkplätzen A, B, C.

(a) Nach den Angaben sind einerseits $0.2\cdot a+0.4\cdot b+0.6\cdot c$ und andererseits $0.5\cdot(a+b+c)$ Stellplätze insgesamt belegt. Also gilt:

$$0.2\cdot a+0.4\cdot b+0.6\cdot c = 0.5\cdot(a+b+c) \overset{\cdot 10}{\Leftrightarrow} 2a+4b+6c = 5a+5b+5c \overset{-2a-4b-5c}{\Leftrightarrow} \boxed{c = 3a+b \quad (1)}$$

Weiterhin gilt nach der Angabe zu den freien Stellplätzen (auf A bzw. B bzw. C sind $0.8\cdot a$ bzw. $0.6\cdot b$ bzw. $0.4\cdot c$ Plätze frei):

$$0.4\cdot c = 0.8\cdot a + 0.6\cdot b \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} \boxed{2c = 4a+3b \quad (2)}$$

Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man:

$$2(3a+b) = 4a+3b \quad\Leftrightarrow\quad 6a+2b = 4a+3b \overset{-4a-2b}{\Leftrightarrow} 2a = b$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt: $\quad c = 3a+2a = 5a$

Mit $b = 2a$ und $c = 5a$ ergibt sich die Gesamtzahl aller Stellplätze als: $\quad a+b+c = a+2a+5a = 8a$

Insgesamt folgt schließlich:

Parkplatz	Anteil der Stellplätze
A	$\frac{a}{8a} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$
B	$\frac{2a}{8a} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$
C	$\frac{5a}{8a} = \frac{5}{8} = 0.625 = 62.5\%$

(b) Sei x die Zahl der freien Stellplätze auf einem einzelnen Parkplatz (nach Voraussetzung gibt es nun auf allen drei Parkplatzen diesselbe Zahl freier Plätze):

Damit sind insgesamt $8a-3x$ Stellplätze belegt (nach (a) gibt es $8a$ Plätze insgesamt, von denen $3x$ frei sind), nach der Angabe entspricht dies $\frac{5}{8}\cdot 8a = 5a$. Also:

$$8a-3x = 5a \overset{5a+30x}{\Leftrightarrow} 3a = 3x \overset{:3}{\Leftrightarrow} a = x$$

Auf Parkplatz A sind also alle Stellplätze frei und damit 0% der Stellplätze belegt.

Auf Parkplatz B sind $\frac{x}{b} \overset{(\text{s.o.})}{=} \frac{a}{2a} = 0.5 = 50\%$ der Stellplätze frei und damit $1-0.5 = 0.5 = 50\%$ der Stellplätze belegt.

Auf Parkplatz C sind $\frac{x}{c} \overset{(\text{s.o.})}{=} \frac{a}{5a} = 0.2 = 20\%$ der Stellplätze frei und damit $1-0.8 = 0.2 = 80\%$ der Stellplätze belegt.

Aufgabe MG2:

(a) Bestimmt alle möglichen Kombinationen von Ziffern A, B aus $1, \ldots, 9$, so dass für die zweistellige Zahl AB und die dreistellige Zahl BAA mit den Ziffern A und B gilt:

$$8 \cdot AB = BAA$$

(b) Bestimmt alle möglichen Kombinationen von Ziffern A, B aus $1, \ldots, 9$, so dass für die zweistellige Zahl AB und die vierstellige Zahl $BAAB$ mit den Ziffern A und B gilt:

$$77 \cdot AB = BAAB$$

(c) Bestimmt alle möglichen Kombinationen von Ziffern A aus $1, \ldots, 9$ und B, C aus $0, \ldots, 9$, so dass für die dreistellige Zahl ABC und die fünfstellige Zahl $AAABC$ mit den Ziffern A und B gilt:

$$89 \cdot ABC = AAABC$$

Lösung MG2:

(a) Es gilt: $AB = 10 \cdot A + B$ und $BAA = 100 \cdot B + 10 \cdot A + A = 100 \cdot B + 11 \cdot A$

Also:

$$\begin{aligned} 8 \cdot AB = BAA \quad &\Leftrightarrow \quad 8 \cdot (10 \cdot A + B) = 100 \cdot B + 11 \cdot A \\ &\Leftrightarrow \quad 80 \cdot A + 8 \cdot B = 100 \cdot B + 11 \cdot A \\ &\overset{-11A-8B}{\Leftrightarrow} \quad 69 \cdot A = 92 \cdot B \\ &\overset{:23}{\Leftrightarrow} \quad 3 \cdot A = 4 \cdot B \end{aligned}$$

Damit muss A durch 4 teilbar sein ($3 \cdot A = 4 \cdot B$ ist durch 4 teilbar und die Zahlen 3 und 4 sind teilerfremd), daher muss (wegen $A \in \{1, \ldots, 9\}$) $A = 4$ oder $A = 8$ gelten.

Mit $3 \cdot A = 4 \cdot B$ folgt: Für $A = 4$ ist $B = 3$. Für $A = 8$ ist $B = 6$.

Also sind $AB = 43$ oder $AB = 86$ die beiden einzigen Möglichkeiten.

(b) Es gilt: $AB = 10 \cdot A + B$ und $BAAB = 1000 \cdot B + 100 \cdot A + 10 \cdot A + B = 1001 \cdot B + 110 \cdot A$

Also:

$$\begin{aligned} 77 \cdot AB = BAAB \quad &\Leftrightarrow \quad 77 \cdot (10 \cdot A + B) = 1001 \cdot B + 110 \cdot A \\ &\Leftrightarrow \quad 770 \cdot A + 77 \cdot B = 1001 \cdot B + 110 \cdot A \\ &\overset{-110A-77B}{\Leftrightarrow} \quad 660 \cdot A = 924 \cdot B \\ &\overset{:132}{\Leftrightarrow} \quad 5 \cdot A = 7 \cdot B \end{aligned}$$

Damit muss A durch 7 teilbar sein ($5 \cdot A = 7 \cdot B$ ist durch 7 teilbar und die Zahlen 5 und 7 sind teilerfremd), daher muss (wegen $A \in \{1, \ldots, 9\}$) $A = 7$ gelten.

Mit $5 \cdot A = 7 \cdot B$ folgt: Für $A = 7$ ist $B = 5$.

Also ist $AB = 75$ die einzige Möglichkeit.

(c) Es gilt: $ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$
und $AAABC = 10000 \cdot A + 1000 \cdot A + 100 \cdot A + 10 \cdot B + C = 11100 \cdot A + 10 \cdot B + C$

Also:

$$\begin{aligned} 89 \cdot ABC = AABBC \quad &\Leftrightarrow \quad 89 \cdot (100 \cdot A + 10 \cdot B + C) = 11100 \cdot A + 10 \cdot B + C \\ &\Leftrightarrow \quad 8900 \cdot A + 890 \cdot B + 89 \cdot C = 11100 \cdot A + 10 \cdot B + C \\ &\overset{-8900A-10B-C}{\Leftrightarrow} \quad 880 \cdot B + 88 \cdot C = 2200 \cdot A \\ &\overset{:88}{\Leftrightarrow} \quad 10 \cdot B + C = 25 \cdot A \end{aligned}$$

Damit muss C durch 5 teilbar sein ($C = 25A - 10B = 5 \cdot (5A - 2B)$), daher muss (wegen $C \in \{0, \ldots, 9\}$) $C = 0$ oder $C = 5$ gelten.

- Im Fall $C = 0$ ergibt sich: $10 \cdot B + C = 25 \cdot A \overset{:5}{\Leftrightarrow} 2 \cdot B = 5 \cdot A$

  Damit muss A gerade sein (da 5 ungerade und $5A = 2B$ gerade). Für $A = 2$ ergibt sich $B = 5$. Für $A \geq 4$ müsste $B \geq 10$ sein, was ausgeschlossen ist ($B \in \{1, \ldots, 9\}$).

- Im Fall $C = 5$ ergibt sich: $10 \cdot B + 5 = 25 \cdot A \overset{:5}{\Leftrightarrow} 2 \cdot B + 1 = 5 \cdot A$

  Damit muss A ungerade sein (da $5A = 2B + 1$ ungerade). Für $A = 1$ ergibt sich $B = 2$. Für $A = 3$ ergibt sich $B = 7$. Für $A \geq 5$ müsste $B \geq 12$ sein, was ausgeschlossen ist ($B \in \{1, \ldots, 9\}$).

Also sind $AB = 125$ oder $AB = 250$ oder $AB = 375$ die einzigen Möglichkeiten.

Aufgabe MG3:

Gegeben sei ein Quadrat $\square ABCD$ mit Mittelpunkt M. Der Punkt E sei so gewählt, dass $\triangle AME$ gleichseitig ist. (Es gibt dafür zwei Möglichkeiten, siehe Aufgabenteile (a) und (b).)

Bestimmt den Schnittwinkel der Geraden BE und AC, falls:

(a) B und E auf verschiedenen Seiten von AC liegen

(b) B und E auf derselben Seite von AC liegen

Die Antworten sind zu begründen. (Argumentiert mithilfe bekannter Größen. Ein Messen der Winkel ist keine ausreichende Begründung.)

Lösung MG3:

(a) Wir bezeichnen den Schnittpunkt von BE und AC mit S.

Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle AME$ sind alle gleich groß, also insbesondere (beachte auch die Winkelsumme im Dreieck): $\measuredangle EMA = \frac{180°}{3} = 60°$

Da sich die Diagonalen des Quadrats $\square ABCD$ senkrecht schneiden, gilt $\measuredangle AMB = 90°$ und folglich: $\measuredangle EMB = \measuredangle EMA + \measuredangle AMB = 60° + 90° = 150°$

Weiterhin gilt $|\overline{ME}| = |\overline{MA}|$ (da $\triangle AME$ gleichseitig ist) und $|\overline{MB}| = |\overline{MA}|$ (da der Mittelpunkt eines Quadrats zu allen Eckpunkten den gleichen Abstand hat).

Durch Gleichsetzen folgt: $|\overline{ME}| = |\overline{MB}|$

Somit ist das Dreieck $\triangle EMB$ gleichschenklig und es folgt: $\measuredangle BEM = \measuredangle MBE$

Mit der Winkelsumme im Dreieck $\triangle EMB$ folgt daraus genauer:

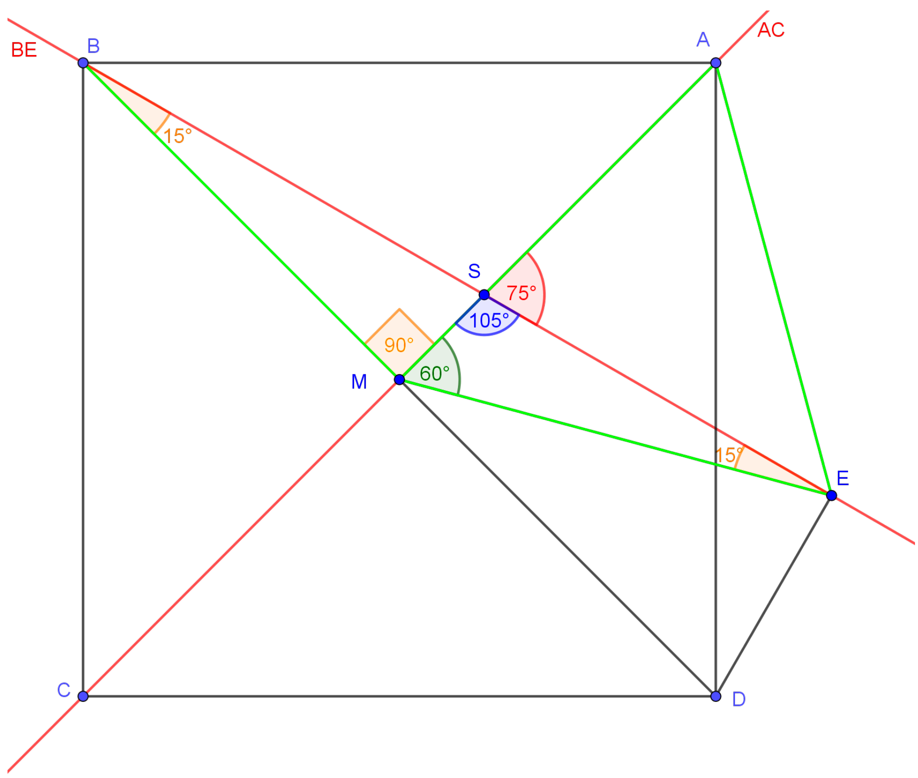
$$\measuredangle BEM = \measuredangle MBE = \frac{180° - \measuredangle EMB}{2} \overset{\text{(s.o.)}}{=} \frac{180° - 150°}{2} = 15°$$

Mit der Winkelsumme in Dreieck $\triangle EMS$ folgt schließlich:

$$\measuredangle MSE = 180° - \measuredangle SEM - \measuredangle EMS = 180° - \measuredangle BEM - \measuredangle EMA \overset{\text{(s.o.)}}{=} 180° - 15° - 60° = 105°$$

Damit beträgt der gesuchte Schnittwinkel von BE und AC:

$$\measuredangle ESA = 180° - \measuredangle MSE = 180° - 105° = 75°$$



(b) Wir bezeichnen den Schnittpunkt von BE und AC mit S.

Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle AME$ sind alle gleich groß, also insbesondere (beachte auch die Winkelsumme im Dreieck): $\measuredangle AME = \frac{180°}{3} = 60°$

Da sich die Diagonalen des Quadrats $\square ABCD$ senkrecht schneiden, gilt $\measuredangle AMB = 90°$ und folglich: $\measuredangle EMB = \measuredangle AMB - \measuredangle AME = 90° - 60° = 30°$

Weiterhin gilt $|\overline{ME}| = |\overline{MA}|$ (da $\triangle AME$ gleichseitig ist) und $|\overline{MB}| = |\overline{MA}|$ (da der Mittelpunkt eines Quadrats zu allen Eckpunkten den gleichen Abstand hat).

Durch Gleichsetzen folgt: $|\overline{ME}| = |\overline{MB}|$

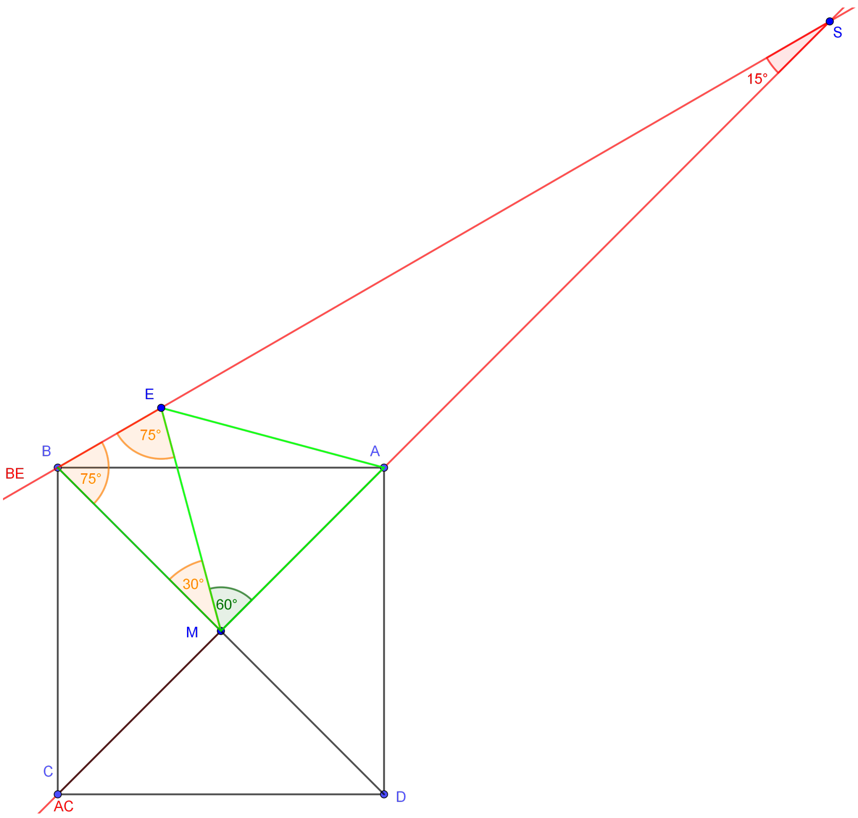
Somit ist das Dreieck $\triangle EMB$ gleichschenklig und es folgt: $\measuredangle BEM = \measuredangle MBE$

Mit der Winkelsumme im Dreieck $\triangle EMB$ folgt daraus genauer:

$$\measuredangle BEM = \measuredangle MBE = \frac{180° - \measuredangle EMB}{2} \overset{\text{(s.o.)}}{=} \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$

Mit der Winkelsumme in Dreieck $\triangle BMS$ folgt schließlich für den gesuchten Schnittwinkel von BE und AC:

$$\measuredangle BSM = 180° - \measuredangle SMB - \measuredangle MBS = 180° - \measuredangle AMB - \measuredangle MBE \overset{\text{(s.o.)}}{=} 180° - 90° - 75° = 15°$$

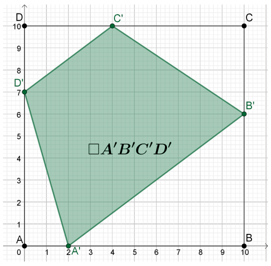


Aufgabe MG4:

Gegeben sei das Quadrat $\square ABCD$ mit $A = (0,0)$, $B = (10,0)$, $C = (10,10)$ und $D = (0,10)$. Es sollen nun Punkte

A' auf $\overline{AB}$ $\quad$ B' auf $\overline{BC}$ $\quad$ C' auf $\overline{CD}$ $\quad$ D' auf $\overline{DA}$

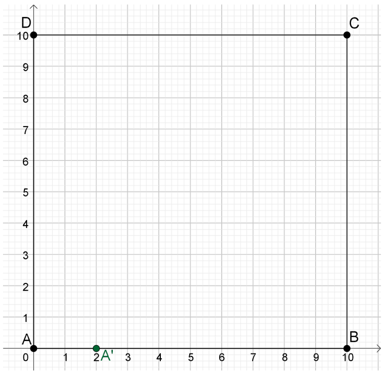
gewählt werden, so dass ein weiteres Viereck $\square A'B'C'D'$ entsteht.

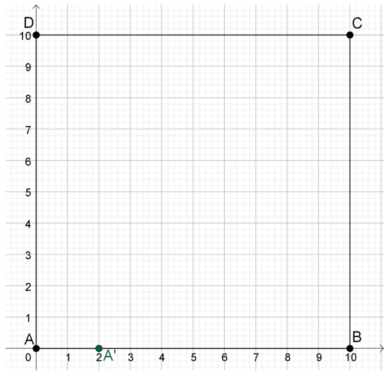


> Gegeben sei dabei der Punkt $A' = (2,0)$.
>
> Gesucht sind in (a) und (b) jeweils die übrigen Punkte B', C', D'.

(a) Gesucht sind B', C', D' so, dass $\square A'B'C'D'$ ein Rechteck ist. Es gibt dafür zwei Möglichkeiten.

1.) Zeichnet die beiden möglichen Rechtecke in die Grafiken ein.





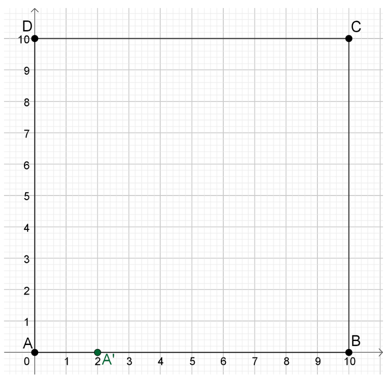
2.) Begründet jeweils, dass es sich tatsächlich um Rechtecke handelt. (Argumentiert mithilfe bekannter Größen. Ein Messen der Winkel ist keine ausreichende Begründung.)

3.) Berechnet für beide gefundenen Rechtecke den Flächeninhalt.

4.) Begründet, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

(b) Gesucht sind nun B', C', D' so, dass $\square A'B'C'D'$ ein Parallelogramm mit Flächeninhalt 44 ist.

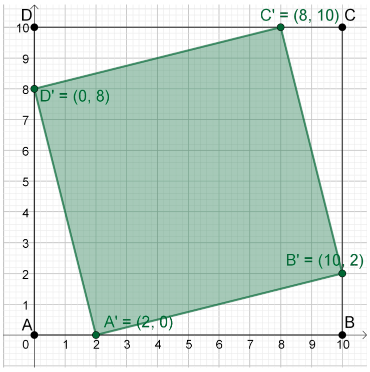
Begründet, dass es hierfür nur eine Möglichkeit gibt und zeichnet das gesuchte Parallelogramm in die folgende Grafik ein.



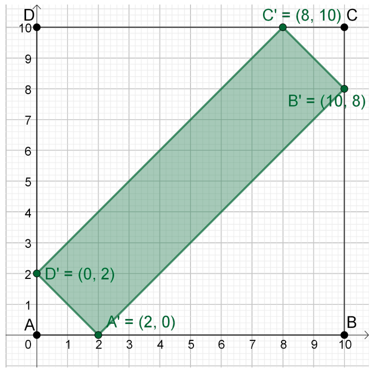
Lösung MG4:

(a) 1.)

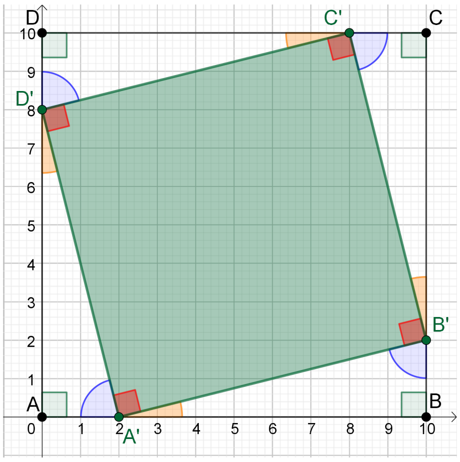
1. Fall



2. Fall



2.) $\boxed{\text{Im ersten Fall}}$ sind die vier Dreiecke $\triangle A'BB'$, $\triangle B'CC'$, $\triangle C'DD'$, $\triangle D'AA'$ alle kongruent, denn sie haben jeweils eine Seite der Länge 8 und eine Seite der Länge 2 und dazwischen einen rechten Winkel (Kongruenzsatz sws).



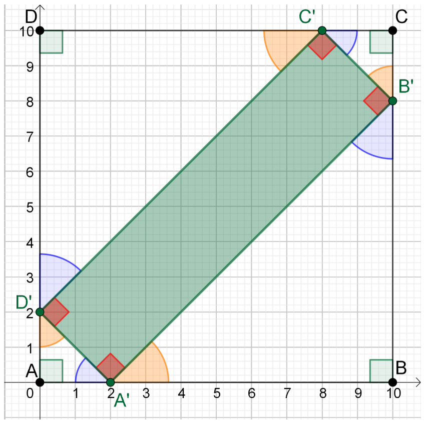
Demzufolge sind alle blau eingezeichneten Winkel gleich groß und auch alle orange eingezeichneten Winkel gleich groß. Wegen der Winkelsumme in einem der Dreiecke ist:

$$\measuredangle\,(\text{blau}) + \measuredangle\,(\text{orange}) + \underbrace{\measuredangle\,(\text{grün})}_{=90^\circ} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle\,(\text{blau}) + \measuredangle\,(\text{orange}) = 90^\circ$$

Da jeweils ein blauer, ein roter und ein orangener Winkel einen gestreckten Winkel bilden, folgt schließlich für alle roten Winkel:

$$\underbrace{\measuredangle\,(\text{blau}) + \measuredangle\,(\text{orange})}_{=90^\circ} + \measuredangle\,(\text{rot}) = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle\,(\text{rot}) = 90^\circ$$

Im zweiten Fall sind die vier Dreiecke $\triangle A'BB'$, $\triangle B'CC'$, $\triangle C'DD'$, $\triangle D'AA'$ alle rechtwinklig und gleichschenklig (zwei Seiten der Länge 2 bzw. zwei Seiten der Länge 8) und damit haben sowohl alle blau als auch alle orange eingezeichneten Winkel das Maß 45°.



Daraus folgt $\measuredangle$ (blau) + $\measuredangle$ (orange) = 45° + 45° = 90° und wir können wie im ersten Fall argumentieren, dass damit auch $\measuredangle$ (rot) = 90° gilt.

3.) In beiden Fällen ist:

$$F(\square A'B'C'D') = \underbrace{F(\square ABCD)}_{=10\cdot 10=100} - F(\triangle A'BB') - F(\triangle B'CC') - F(\triangle C'DD') - F(\triangle D'AA')$$

Im ersten Fall sind alle vier vorkommenden Dreieck rechtwinklig mit den Kathetenlängen 8 und 2. Es folgt:

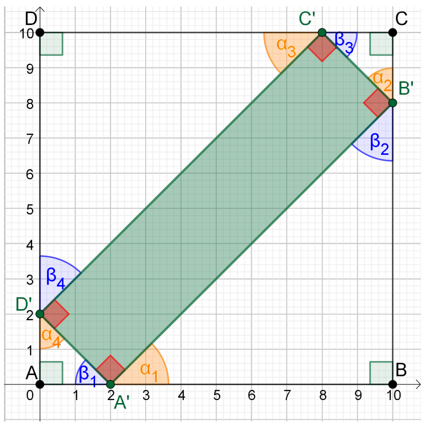
$$F(\square A'B'C'D') = 100 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 100 - 32 = 68$$

Im zweiten Fall sind alle vier vorkommenden Dreieck rechtwinklig und gleichschenklig, wobei zwei davon die Kathetenlänge 2 und die beiden anderen die Kathetenlänge 8 haben. Es folgt:

$$F(\square A'B'C'D') = 100 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 100 - 4 - 64 = 32$$

4.) Wenn sowohl $\square ABCD$ als auch $\square A'B'C'D'$ Rechtecke sind, sind alle grün eingezeichneten und alle rot eingezeichneten Winkel rechte Winkel.

Wir betrachten zusätzlich die orange eingezeichneten Winkel $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ und die blau eingezeichneten Winkel $\beta_1, \ldots, \beta_4$.



Da sich α_1 und β_1 zusammen mit einem rechten Winkel (rot) zu einem gestreckten Winkel ergänzen, gilt:

$$\alpha_1 + \beta_1 + 90^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ \ (1)$$

Aus der Winkelsumme im Dreieck $\triangle D'AA'$ folgt:

$$\alpha_2 + \beta_1 + \underbrace{90^\circ}_{\text{grün}} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 + \beta_1 = 90^\circ \ (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) liefert: $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_4 + \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_4$

In gleicher Weise folgt, dass alle orange eingezeichneten Winkel und ebenso auch alle blau eingezeichneten Winkel jeweils gleich groß sind. Damit sind die vier Dreiecke

$$\triangle A'BB' \quad , \quad \triangle B'CC' \quad , \quad \triangle C'DD' \quad , \quad \triangle D'AA'$$

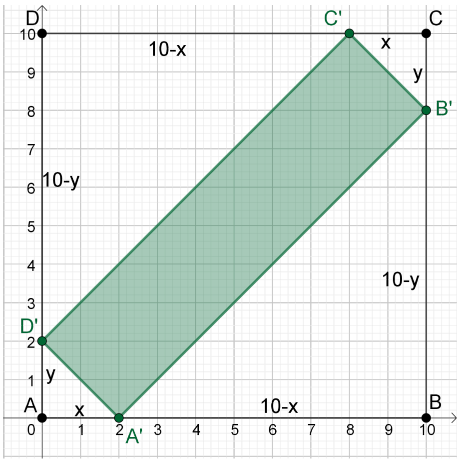
(nach dem Ähnlichkeitssatz www) alle ähnlich zueinander. Da gegenüberliegende Seiten des Rechtecks $\square A'B'C'D'$ gleich lang sind, sind dabei jeweils zwei gegenüberliegende Dreiecke, also

$$(\triangle A'BB' \text{ und } \triangle C'DD') \quad \text{sowie} \quad (\triangle B'CC' \text{ und } \triangle D'AA')$$

sogar kongruent zueinander (Kongruenzsatz wsw).

Wir bezeichnen $|\overline{AA'}| = x$ (wegen $A' = (2,0)$ ist $x = 2$ bekannt) und $|\overline{AD'}| = y$.

Wegen der Kongruenz von $\triangle B'CC'$ und $\triangle D'AA'$ ist dann auch $|\overline{CC'}| = x$ und $|\overline{CB'}| = y$ und folglich $|\overline{A'B}| = |\overline{C'D}| = 10 - x$ sowie $|\overline{B'B}| = |\overline{D'D}| = 10 - y$.



Schließlich nutzen wir die Ähnlichkeit der Dreiecke $D'AA'$ und $\triangle A'BB'$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{AD'}|} = \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{BA'}|} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{10-y}{10-x} \\
&\overset{\cdot y(10-x)\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} \quad x\cdot(x-10) = y\cdot(y-10) \\
&\overset{+25}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 10x + 25 = y^2 - 10y + 25 \\
&\overset{\text{(bin. Formel)}}{\Leftrightarrow} \quad (x-5)^2 = (y-5)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x - 5 = y - 5 \quad \underline{\text{oder}} \quad x - 5 = -(y-5) \\
&\overset{+5}{\Leftrightarrow} \quad x = y \quad \underline{\text{oder}} \quad x = 10 - y
\end{aligned}$$

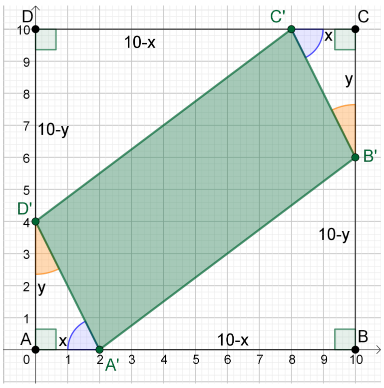
Falls $x = y$ ist, ergibt sich mit $x = 2$ (dies folgt aus $A' = (2,0)$) auch $y = 2$ und man erhält die weiteren Punkte $B' = (10,8)$, $C' = (8,10)$ und $D' = (0,2)$. Dies entspricht dem 2. Fall.

Falls $x = 10 - y$ ist, ergibt sich $y = 8$ aus $x = 2$ und man erhält die weiteren Punkte $B' = (10,2)$, $C' = (8,10)$ und $D' = (0,8)$. Dies entspricht dem 1. Fall.

(b) Wir bezeichnen $|\overline{AA'}| = x$ (wegen $A' = (2,0)$ ist $x = 2$ bekannt) und $|\overline{AD'}| = y$.

Wenn $\square A'B'C'D'$ ein Parallelogramm ist, so sind die gegenüberliegenden Seiten $\overline{A'D'}$ und $\overline{B'C'}$ parallel und gleichlang.

Da auch $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ sowie $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ (jeweils gegenüberliegende Seiten des Quadrats $\square ABCD$) gilt, sind die beiden orange eingezeichneten Winkel und auch die beiden blau eingezeichneten Winkel jeweils gleich groß.



Insgesamt folgt nun aus dem Kongruenzsatz wsw, dass die Dreiecke $\triangle B'CC'$ und $\triangle D'AA'$ kongruent sind. Damit ist auch $|\overline{CC'}| = x$ und $|\overline{CB'}| = y$ und folglich $|\overline{A'B}| = |\overline{C'D}| = 10 - x$ sowie $|\overline{B'B}| = |\overline{D'D}| = 10 - y$.

Umgekehrt folgt aus $|\overline{AA'}| = |\overline{CC'}| = x$ und $|\overline{AD'}| = |\overline{CB'}| = y$ sowie $|\overline{A'B}| = |\overline{C'D}| = 10 - x$ und $|\overline{B'B}| = |\overline{D'D}| = 10 - y$, dass jeweils zwei gegenüberliegende Dreiecke, also $\triangle A'BB'$ und $\triangle C'DD'$ sowie $\triangle B'CC'$ und $\triangle D'AA'$ kongruent sind (sws), dass daher die Seiten $\overline{A'D'}$ und $\overline{B'C'}$ gleich lang und auch die Seiten $\overline{A'B'}$ und $\overline{C'D'}$ gleich lang sind und dass folglich $\square A'B'C'D'$ ein Parallelogramm ist.

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms $\square A'B'C'D'$ gilt nun (beachte, dass die vier Dreiecke $\triangle A'BB'$, $\triangle B'CC'$, $\triangle C'DD'$, $\triangle D'AA'$ rechtwinklig sind):

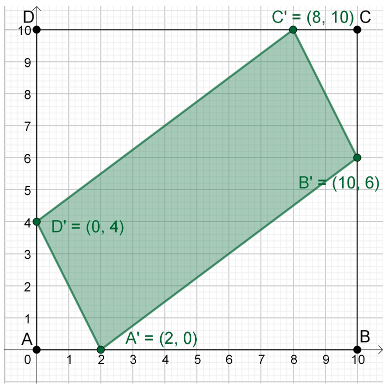
$$\begin{aligned} F(\square A'B'C'D') &= \underbrace{F(\square ABCD)}_{=10\cdot 10=100} - \underbrace{F(\triangle A'BB')}_{=\frac{1}{2}\cdot(10-x)\cdot(10-y)} - \underbrace{F(\triangle B'CC')}_{=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y} - \underbrace{F(\triangle C'DD')}_{=\frac{1}{2}\cdot(10-x)\cdot(10-y)} - \underbrace{F(\triangle D'AA')}_{=\frac{1}{2}\cdot x\cdot y} \\ &= 100-(10-x)(10-y)-xy \\ &= 100-(100-10x-10y+xy)-xy \\ &= 10x+10y-2xy \end{aligned}$$

Speziell mit $x=2$ (dies folgt aus $A'=(2,0)$) ergibt sich $F(\square A'B'C'D') = 20+10y-4y = 20+6y$.

Da $F(\square A'B'C'D') = 44$ bekannt ist, folgt:

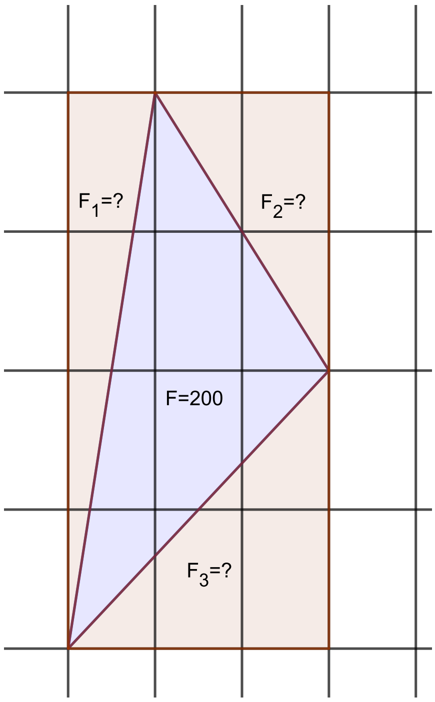
$$20+6y=44 \quad \overset{-20}{\Leftrightarrow} \quad 6y=24 \quad \overset{:6}{\Leftrightarrow} \quad y=4$$

Insgesamt ergeben sich aus $x=2$ und $y=4$ die weiteren Punkte B', C', D' wie in der folgenden Grafik:



Aufgabe MS1:

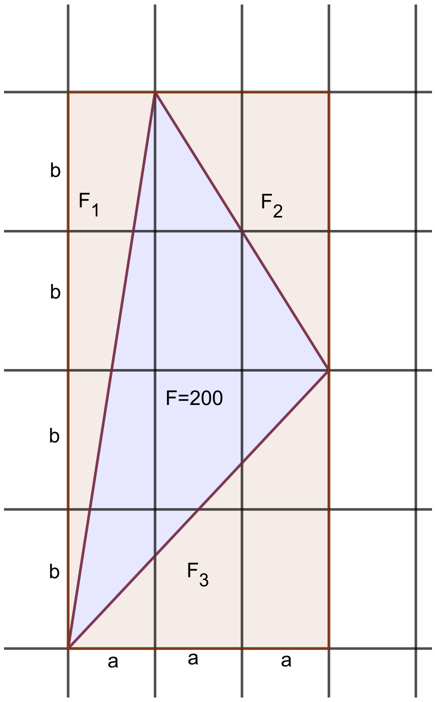
Die Ebene sei mit Rechtecken ausgelegt. Es sind vier Dreiecke eingezeichnet, eines davon hat den Flächeninhalt $F = 200$ (siehe Grafik).



Wie groß sind die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3 der übrigen drei Dreiecke?

Lösung MS1:

Seien a, b die Seitenlängen eines der Rechtecke (siehe Grafik).



Es gilt:

- F_1 ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlängen a und $4b$, also:
$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4b = 2 \cdot ab$$
- F_2 ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlängen $2a$ und $2b$, also:
$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2 \cdot ab$$
- F_3 ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlängen $3a$ und $2b$, also:
$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 2b = 3 \cdot ab$$

Die vier Dreiecke setzen sich zu einem Rechteck mit Seitenlängen $3a$ und $4b$ zusammen, also:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + F = 3a \cdot 4b = 12ab \quad &\overset{F_1,F_2,F_3 \text{ wie oben}, \ F=200}{\Leftrightarrow} \quad 2ab + 2ab + 3ab + 200 = 12ab \\ &\overset{-7ab}{\Leftrightarrow} \quad 200 = 5ab \\ &\overset{:5}{\Leftrightarrow} \quad 40 = ab \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man nun:

$$F_1 = 2 \cdot ab = 2 \cdot 40 = 80 \quad , \quad F_2 = 2 \cdot ab = 2 \cdot 40 = 80 \quad , \quad F_3 = 3 \cdot ab = 3 \cdot 40 = 120 \quad ,$$

Aufgabe MS2:

Der 22.02.2022 war ein sogenannter “Palindrom-Tag“, denn die Ziffernfolge, die das Datum beschreibt, ist vorwärts und rückwärts gelesen diesselbe.

2	2		0	2		2	0	2	2
Tag			Monat			Jahr			

Dabei wird das Datum mit jeweils 2 Ziffern für Tag und Monat (ggf. mit einer vorgestellten 0) und 4 Ziffern für das Jahr angegeben.

(a) Wann war vor dem 22.02.2022 der letzte Palindrom-Tag ?

(b) Wann wird nach dem 22.02.2022 der nächste Palindrom-Tag sein?

(c) Wieviele Palindrom-Tage gibt es im Zeitraum 01.01.2000 bis 31.12.2099 ?

Lösung MS2:

(a)

1	2		0	2		2	0	2	1
Tag			Monat			Jahr			

(b)

0	3		0	2		2	0	3	0
Tag			Monat			Jahr			

(c) Ein Palindrom-Tag im Zeitraum 01.01.2000 bis 31.12.2099 kann nur von der folgenden Form sein:

x	y		0	2		2	0	y	x
Tag			Monat			Jahr			

Also muss xy die Zifferndarstellung eines Tags im Februar sein. Der Februar hat maximal 29 Tage, für jeden dieser Tage existiert ein entsprechender Palindrom-Tag. (Man beachte, dass hier auch der 29. Februar möglich ist, da das Jahr 2092 ein Schaltjahr (durch 4 teilbare Jahreszahl) ist und daher der 29.02.2092 als Palindrom-Tag existiert.

Im Zeitraum 01.01.2000 bis 31.12.2099 gibt es genau 29 Palindrom-Tage.

Aufgabe MS3:

Anna und Bert machen ein Radtour. Da Anna sich verspätet hat, ist Bert schon mit konstanter Geschwindigkeit losgefahren. Anna möchte nun schneller fahren, um ihn wieder einzuholen. Es gilt:

- Wenn Anna mit 25km/h fährt, wird sie Bert in 18 Minuten einholen.
- Wenn Anna mit 20km/h fährt, wird sie Bert in 30 Minuten einholen.

(a) Wie schnell fährt Bert?

(b) Wie lange braucht Anna, um Bert einzuholen, wenn sie mit 15km/h fährt?

(c) Wie schnell muss Anna fahren, um Bert in 10 Minuten einzuholen?

Lösung MS3:

(a) Seien v_A, v_B die Geschwindigkeiten von Anna bzw. Bert und s die Länge der Strecke, die Bert bereits gefahren ist, wenn Anna losfährt.

Die Zeit, die Anna zum Einholen von Bert benötigt, berechnet sich dann durch $t = \frac{s}{v_A - V_B}$ (beachte, dass sich Anna mit der Geschwindigkeit von $v_A - V_B$ an Bert annähert). Also gilt:

$$\begin{array}{lrcccrcl} & 18\text{min} & = & \frac{s}{25\text{km/h}-V_B} & \Leftrightarrow & \frac{3}{10}\text{h}\cdot(25\text{km/h}-V_B) & = & s \\ \text{und} & 30\text{min} & = & \frac{s}{20\text{km/h}-V_B} & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\text{h}\cdot(20\text{km/h}-V_B) & = & s \end{array}$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$\begin{array}{rl} & \frac{3}{10}\text{h}\cdot(25\text{km/h}-V_B) = \frac{1}{2}\text{h}\cdot(20\text{km/h}-V_B) \\ \Leftrightarrow & 7.5\text{km} - \frac{3}{10}\text{h}\cdot v_B = 10\text{km} - \frac{1}{2}\text{h}\cdot v_B \\ \overset{-7.5\text{km}+\frac{1}{2}\text{h}\cdot v_B}{\Leftrightarrow} & \frac{1}{5}\text{h}\cdot v_B = 2.5\text{km} \\ \overset{:\frac{1}{5}\text{h}}{\Leftrightarrow} & v_B = \frac{2.5\text{km}}{1/5\text{h}} = 12.5\text{km/h} \end{array}$$

Bert fährt also mit einer Geschwindigkeit von $v_B = 12.5\text{km/h}$.

(b) Wir können nun auch die Streckenlänge s berechnen, indem wir $v_B = 12.5\text{km/h}$ in eine der Gleichungen aus (a) einsetzen. Es gilt:

$$s = \frac{3}{10}\text{h}\cdot(25\text{km/h}-12.5\text{km/h}) = \frac{3}{10}\text{h}\cdot 12.5\text{km/h} = 3.75\text{km}$$

bzw.

$$s = \frac{1}{2}\text{h}\cdot(20\text{km/h}-12.5\text{km/h}) = \frac{1}{2}\text{h}\cdot 7.5\text{km/h} = 3.75\text{km}$$

Nun ergibt sich (siehe (a)): Im Fall $v_A = 15\text{km/h}$ benötigt Anna (siehe (a)) die Zeit

$$t = \frac{3.75\text{km}}{15\text{km/h}-12.5\text{km/h}} = \frac{3.75\text{km}}{2.5\text{km/h}} = 1.5\text{h} = 90\text{min}$$

um Bert einzuholen.

(c) Sei nun v_A die Geschwindigkeit, die Anna fahren müsste, um Bert in 10 Minuten einzuholen. Dann gilt (siehe (a)):

$$10\text{min} = \frac{3.75\text{km}}{v_A - 12.5\text{km/h}} \overset{\cdot(v_A-12.5\text{km/h})\ :10\text{min}}{\Leftrightarrow} v_A - 12.5\text{km/h} = \underbrace{\frac{3.75\text{km}}{10\text{min}}}_{=\frac{3.75\text{km}}{1/6\text{h}}=22.5\text{km/h}} \overset{+12.5\text{km/h}}{\Leftrightarrow} v_B = 35\text{km/h}$$

Anna müsste also 35km/h schnell fahren, um Bert in 10 Minuten einzuholen.

Aufgabe MS4:

Von zwei Quadratzahlen ist eine um 45 größer als die andere.

Gebt alle Möglichkeiten für die beiden Quadratzahlen an.

Lösung MS4:

Seien a^2 und b^2 mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $a > b$ die beiden gesuchten Quadratzahlen.

Dann gilt (unter Verwendung der dritten binomischen Formel):

$$45 = a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

Die Zerlegungen der Zahl 45 in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen sind:

$$45 = 1 \cdot 45 \quad , \quad 45 = 3 \cdot 15 \quad , \quad 45 = 5 \cdot 9$$

Also gibt es drei Möglichkeiten (beachte, dass $a - b, a + b \in \mathbb{N}$ mit $a - b < a + b$):

- Es ist $a - b = 1$ und $a + b = 45$.

  Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man: $2a = 46 \overset{:2}{\Leftrightarrow} a = 23$

  Setzt man dies etwa in die erste Gleichung ein, so folgt: $23 - b = 1 \overset{+b-1}{\Leftrightarrow} 22 = b$

  Also haben wir die Quadratzahlen: $\boxed{22^2 = 484 \text{ und } 23^2 = 529}$

- Es ist $a - b = 3$ und $a + b = 15$.

  Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man: $2a = 18 \overset{:2}{\Leftrightarrow} a = 9$

  Setzt man dies etwa in die erste Gleichung ein, so folgt: $9 - b = 3 \overset{+b-3}{\Leftrightarrow} 6 = b$

  Also haben wir die Quadratzahlen: $\boxed{6^2 = 36 \text{ und } 9^2 = 81}$

- Es ist $a - b = 5$ und $a + b = 9$.

  Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man: $2a = 14 \overset{:2}{\Leftrightarrow} a = 7$

  Setzt man dies etwa in die erste Gleichung ein, so folgt: $7 - b = 5 \overset{+b-5}{\Leftrightarrow} 2 = b$

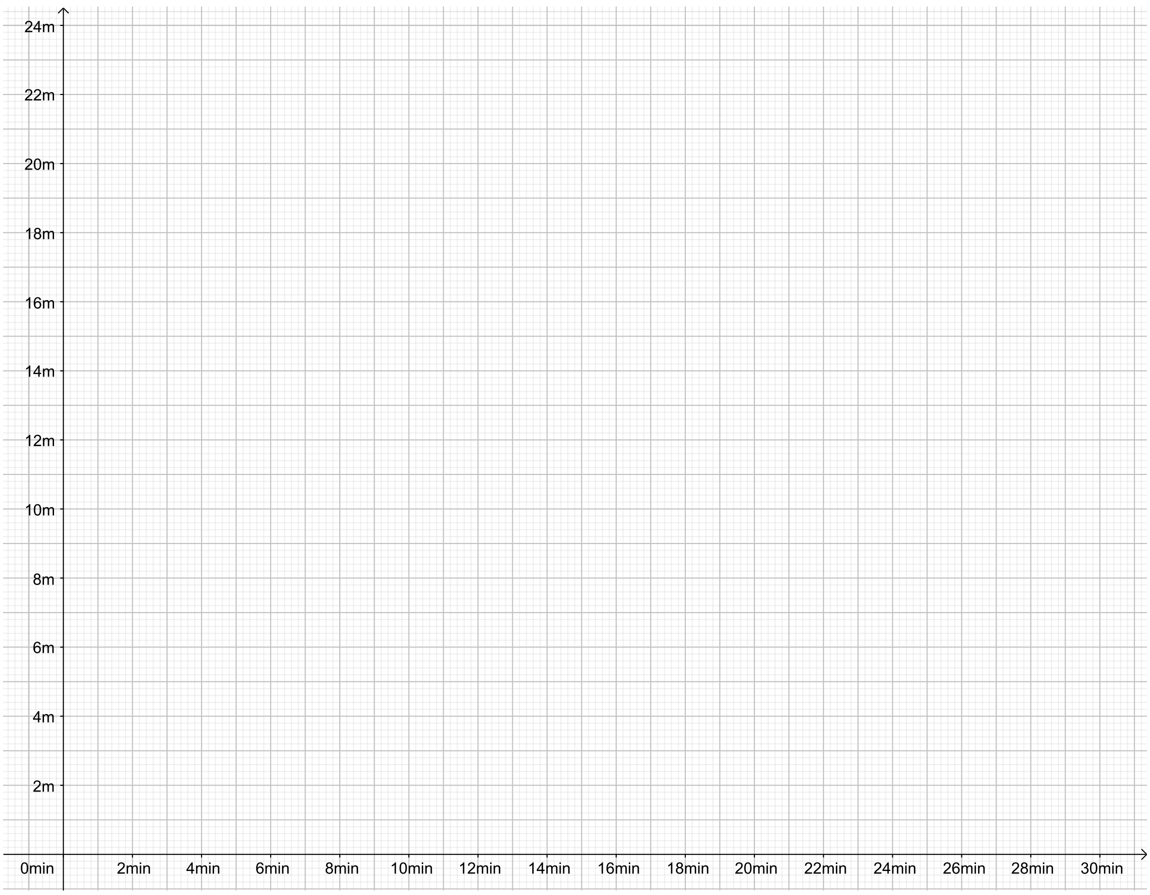
  Also haben wir die Quadratzahlen: $\boxed{2^2 = 4 \text{ und } 7^2 = 49}$

Aufgabe MS5:

Die 6 Meter lange Schlange Tscharley kriecht mit einer Geschwindigkeit vom 1 Meter pro Minute auf ihren Futternapf zu. Währenddessen läuft Ama, die Ameise mit einer Geschwindigkeit von 2 Metern pro Minute immer auf Tscharleys Rücken hin und her, vom vorderen Ende (Kopf) zum hinteren Ende (Schwanzspitze) und wieder zurück.

Zum Zeitpunkt 0 Minuten befindet sich Tscharleys Kopf genau 20 Meter vom Futternapf entfernt und Ama befindet sich genau am Kopf von Tscharley.

Zeichnet den Graphen der Funktion, die den Abstand von Ama zum Futternapf (y-Achse) in Abhängigkeit von der Zeit (x-Achse) angibt. Als Definitionsbereich (x-Achse) soll dabei das Intervall $[0, T]$ gewählt werden, wobei T der Zeitpunkt ist, an dem Ama den Futternapf erreicht. (Beachtet, dass Tscharley anhält, wenn sein Kopf den Napf erreicht.)



Lösung MS5:


24m
22m
20m
18m
16m
14m
12m
10m
8m
6m
4m
2m
0min
2min
4min
6min
8min
10min
12min
14min
16min
18min
20min
22min
24min
26min
28min
30min

Aufgabe MS6:

(a) Wieviele verschiedene vierstellige Zahlen kann man aus den Ziffern $1, 2, 3, 4$ bilden, wenn jede dieser vier Ziffern genau einmal vorkommen soll?

(b) Was ist die Summe aller dieser Zahlen?

Lösung MS6:

(a) Man hat

- 4 Möglichkeiten für die Position der Ziffer 1,
- danach noch 3 Möglichkeiten für die Position der Ziffer 2,
- danach noch 2 Möglichkeiten für die Position der Ziffer 3,
- danach noch 1 Möglichkeit für die Position der Ziffer 4.

Insgesamt kann man also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Zahlen wie gefordert bilden.

(b) In den 24 Zahlen aus (a) steht an jeder Stelle (Einerstelle, Zehnerstelle, Hunderterstelle und Tausenderstelle) jeweils

- 6-mal die Ziffer 1,
- 6-mal die Ziffer 2,
- 6-mal die Ziffer 3,
- und 6-mal die Ziffer 4.

Die Summe der Ziffern an einer Stelle beträgt also jeweils:

$$6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 6 \cdot 10 = 60$$

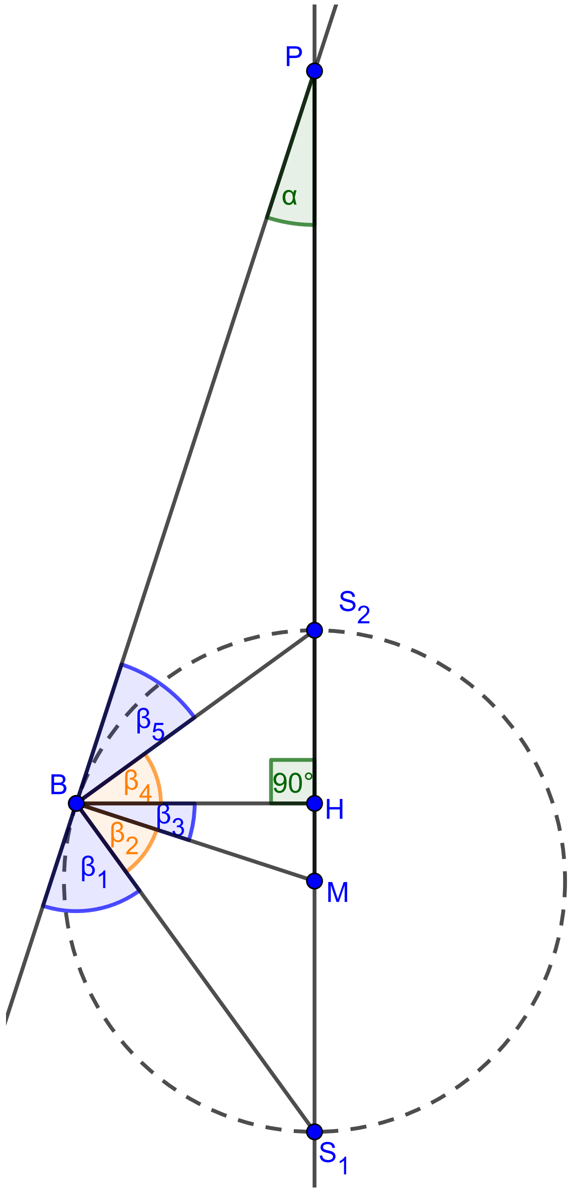
Insgesamt beträgt die Summe der Zahlen folglich:

$$\underbrace{60 \cdot 1}_{\text{Einerstelle}} + \underbrace{60 \cdot 10}_{\text{Zehnerstelle}} + \underbrace{60 \cdot 100}_{\text{Hunderterstelle}} + \underbrace{60 \cdot 1000}_{\text{Tausenderstelle}} = 60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660$$

Aufgabe MS7:

Die Grafik zeigt:

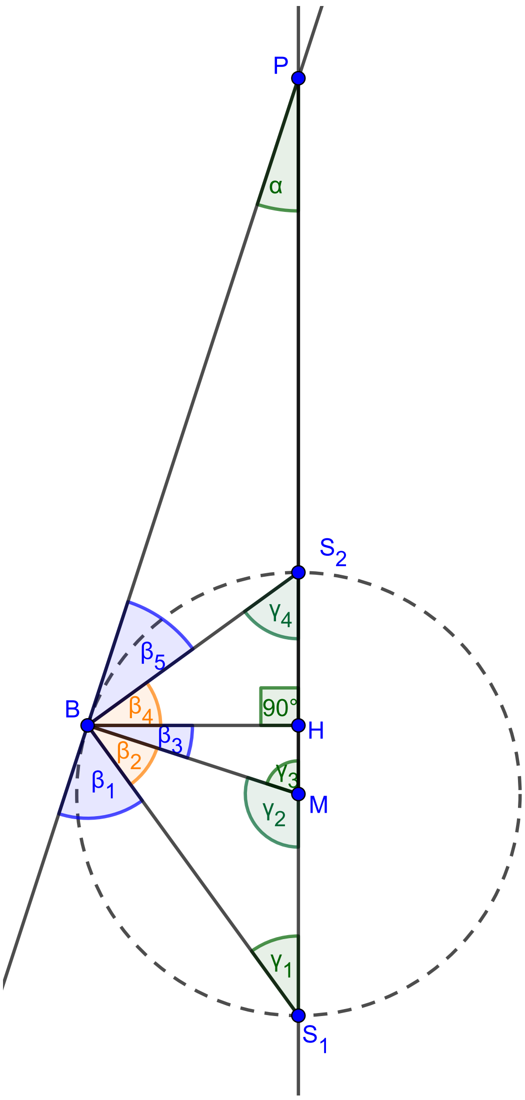
- einen Kreis mit Mittelpunkt M,
- eine Tangente an den Kreis mit Berührpunkt B und einen weiteren Punkt P auf dieser Tangenten,
- die Gerade durch die Punkte P und M sowie die Schnittpunkte S_1, S_2 dieser Geraden mit dem Kreisrand und den Lotfußpunkt H von B auf diese Gerade,
- die eingezeichneten Winkel $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$.



Gebt die Maße der Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ in Abhängigkeit von α (mit einem beliebigen Winkel α mit $0 < \alpha < 90°$) an.

Lösung MS7:

Wir betrachten zusätzlich die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ wie eingezeichnet.



Es gilt:

- Da eine Tangente immer senkrecht auf dem Kreisradius steht, gilt: $\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 90°$
- Nach der Winkelsumme im Dreieck $\triangle PHB$ ist: $\alpha + \beta_4 + \beta_5 = 180° \Rightarrow \alpha + \beta_4 + \beta_5 = 90°$
- Das Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen ergibt: $\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = \alpha + \beta_4 + \beta_5 \Rightarrow \beta_3 = \alpha$
- Wegen $|\overline{MB}| = |\overline{MS_1}|$ (Radius) ist $\triangle BMS_1$ gleichschenklig und somit gilt $\gamma_1 = \beta_2$. Nach der Winkelsumme im Dreieck $\triangle BMS_1$ ist daher $\gamma_2 = 180° - 2\beta_2$ und somit (Nebenwinkel) $\gamma_3 = 180° - \gamma_2 = 2\beta_2$.
- Nach der Winkelsumme im Dreieck $\triangle BMH$ folgt: $\beta_3 + \gamma_3 + 90° = 180° \Rightarrow \gamma_3 = 90° - \underbrace{\beta_3}_{=\alpha}$
- Das Gleichsetzen der letzen beiden Gleichungen ergibt: $2\beta_2 = 90° - \alpha \Rightarrow \beta_2 = 45° - \frac{\alpha}{2}$
- Wegen $|\overline{MB}| = |\overline{MS_2}|$ (Radius) ist $\triangle BMS_2$ gleichschenklig und somit gilt $\gamma_4 = \beta_3 + \beta_4$. Nach der Winkelsumme im Dreieck $\triangle BMS_2$ ist daher:

$$\underbrace{\gamma_3}_{=2\beta_2} + 2 \cdot (\beta_3 + \beta_4) = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 90°$$

$$\Rightarrow \quad \beta_4 = 90° - \beta_2 - \beta_3 = 90° - \left(45° - \tfrac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 45° - \tfrac{\alpha}{2}$$

- Wir setzen nun β_3 und β_4 in $\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 90°$ (siehe oben) ein und erhalten:

$$\beta_5 = 90° - \beta_3 - \beta_4 = 90° - \alpha - \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 45° - \frac{\alpha}{2}$$

- Schließlich ergänzen sich $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ zu einem gestreckten Winkel und daher gilt:

$$\beta_1 = 180° - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 - \beta_5 = 180° - \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha - \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 45° + \frac{\alpha}{2}$$

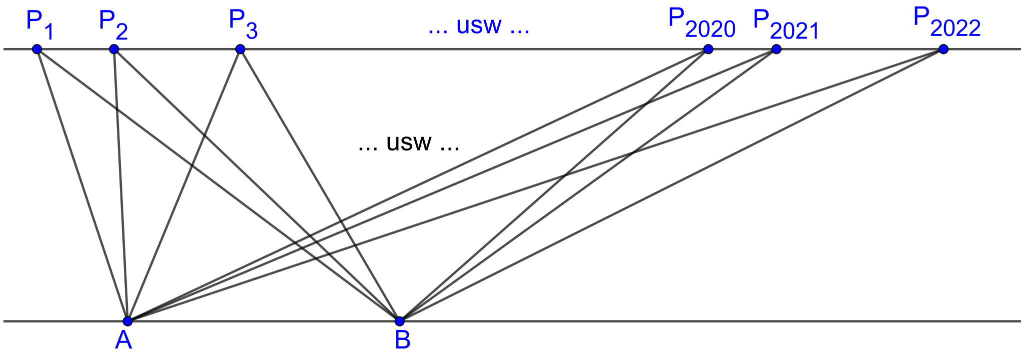
<u>Ergebnis:</u>

$$\beta_1 = 45° + \frac{\alpha}{2} \quad , \quad \beta_3 = \alpha \quad , \quad \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 45° - \frac{\alpha}{2}$$

Aufgabe MS8:

Gegeben seien zwei parallele Geraden sowie zwei Punkte A und B auf der einen Geraden und 2022 Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{2022}$ auf der anderen Geraden.

Nun werden die beiden Punkte A und B jeweils mit allen Punkten $P_1, P_2, \dots, P_{2022}$ durch Strecken verbunden.



Wieviele Schnittpunkte entstehen dadurch im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden?

Lösung MS8:

Die Strecke $\overline{AP_1}$ schneidet keine der Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{0 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_1}$

Die Strecke $\overline{AP_2}$ schneidet die Strecke $\overline{BP_1}$, aber keine der Strecken $\overline{BP_2}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{1 Schnittpunkt}}$ mit $\overline{AP_2}$

Die Strecke $\overline{AP_3}$ schneidet die Strecken $\overline{BP_1}$ und $\overline{BP_2}$, aber keine der Strecken $\overline{BP_3}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{2 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_3}$

usw.

Die Strecke $\overline{AP_{2021}}$ schneidet die Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{2020}}$, aber nicht die Strecken $\overline{BP_{2021}}$ und $\overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{2020 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_{2021}}$

Die Strecke $\overline{AP_{2022}}$ schneidet die Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{2021}}$, aber nicht die Strecke $\overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{2021 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_{2022}}$

Allgemeine Formulierung:

Die Strecke $\overline{AP_k}$ (für $1 \le k \le 2022$) schneidet die Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{k-1}}$, aber keine der Strecken $\overline{BP_k}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{k-1 \text{ Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_k}$ (für $1 \le k \le 2022$)

Insgesamt entstehen also

$$\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+2020+2021 &= \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{array}{cccccccccccc} & 0 & + & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 2020 & + & 2021 \\ + & 2021 & + & 2020 & + & 2019 & + & \ldots & + & 1 & + & 0 \end{array}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\underbrace{2021+2021+2021+\ldots+2021+2021}_{\text{2022-mal}}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2022\cdot 2021 \\
&= 1011\cdot 2021 \\
&= 2\,043\,231
\end{aligned}$$

Schnittpunkte im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden.