

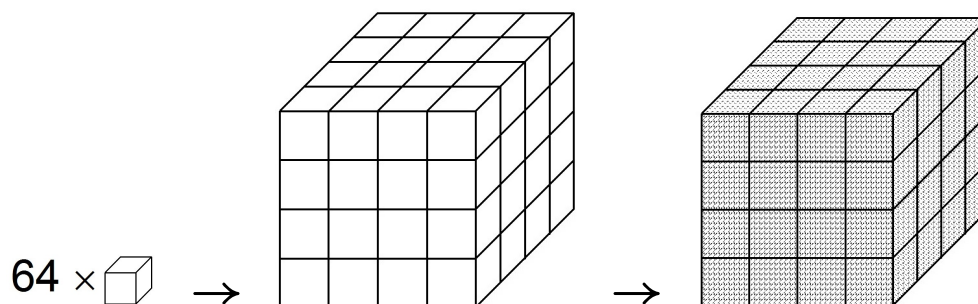
Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

mit Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben OE1, OE2, OE3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

Aufgabe OE1:

- (a) 64 kleine lose Holzwürfel werden zu einem $4 \times 4 \times 4$ Würfel zusammengebaut. Dann wird die komplette Außenfläche des großen Würfels mit grauer Farbe angestrichen (von allen Seiten, also auch von unten).



Nun wird der große Würfel wieder auseinandergebaut.

Wieviele kleine Würfel sind nun auf wievielen Seiten grau ?

Füllen Sie die Tabelle aus und erklären Sie Ihre Überlegungen.

Anzahl der grauen Seiten eines kleinen Würfels	0	1	2	3
Anzahl Würfel				

- (b) Verallgemeinern Sie die Überlegungen aus (a) für einen Würfel der aus n^3 kleinen losen Holzwürfeln zu einem $n \times n \times n$ Würfel zusammengebaut wird. Dabei sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geq 4$.

Füllen Sie die Tabelle aus und erklären Sie Ihre Überlegungen.

Anzahl der grauen Seiten eines kleinen Würfels	0	1	2	3
Anzahl Würfel				

Anmerkung: In die Tabelle sind nun Terme einzutragen, die von n abhängen dürfen.

Lösungsvorschlag:

- (a)
- Die kleinen Würfel in den Ecken des großen Würfels sind auf 3 Seiten grau. Dies sind insgesamt 8 kleine Würfel.
 - Die mittleren beiden Würfel einer jeden Kante des großen Würfels sind auf 2 Seiten grau. Dies sind insgesamt $12 \cdot 2 = 24$ kleine Würfel.
 - Die kleinen Würfel aus dem mittleren 2×2 -Quadrat einer jeden Seite des großen Würfels sind auf 1 Seite grau. Dies sind insgesamt $6 \cdot 4 = 24$ kleine Würfel.
 - Die kleinen Würfel aus dem mittleren/inneren $2 \times 2 \times 2$ -Würfel des großen Würfels sind auf keiner Seite grau. Dies sind insgesamt 8 kleine Würfel.

Ergebnis:

Anzahl der grauen Seiten eines kleinen Würfels	0	1	2	3
Anzahl Würfel	8	24	24	8

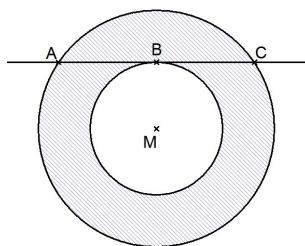
- (b)
- Die kleinen Würfel in den Ecken des großen Würfels sind auf 3 Seiten grau. Dies sind insgesamt 8 kleine Würfel.
 - Die mittleren $n - 2$ Würfel einer jeden Kante des großen Würfels sind auf 2 Seiten grau. Dies sind insgesamt $12 \cdot (n - 2)$ kleine Würfel.
 - Die kleinen Würfel aus dem mittleren $(n - 2) \times (n - 2)$ -Quadrat einer jeden Seite des großen Würfels sind auf 1 Seite grau. Dies sind insgesamt $6 \cdot (n - 2)^2$ kleine Würfel.
 - Die kleinen Würfel aus dem mittleren/inneren $(n - 2) \times (n - 2) \times (n - 2)$ -Würfel des großen Würfels sind auf keiner Seite grau. Dies sind insgesamt $(n - 2)^3$ kleine Würfel.

Ergebnis:

Anzahl der grauen Seiten eines kleinen Würfels	0	1	2	3
Anzahl Würfel	$(n - 2)^3$	$6 \cdot (n - 2)^2$	$12 \cdot (n - 2)$	8

Aufgabe OE2:

Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt M (aber unterschiedlichen Radien) bilden einen Kreisring. Eine Gerade, die den kleineren Kreis im Punkt B berührt, schneidet den größeren Kreis in den Punkten A und C .



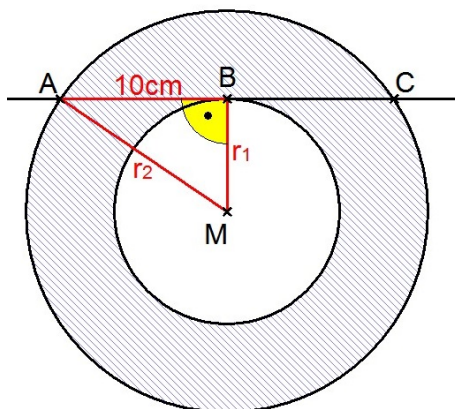
Der Abstand zwischen A und C beträgt $|\overline{AC}| = 20\text{cm}$.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Kreisrings.

Hinweis: $\pi \approx 3.1416$ **Lösungsvorschlag:**

Das Dreieck $\triangle ABM$ ist rechtwinklig mit

- den Kathetenlängen $|\overline{AC}| = \frac{|\overline{AC}|}{2} = 10\text{cm}$ und $|\overline{BM}| = r_1$,
- der Hypothenusenlänge $|\overline{AM}| = r_2$



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$r_1^2 + (10\text{cm})^2 = r_2^2 \quad \Rightarrow \quad r_2^2 - r_1^2 = 100\text{cm}^2$$

Für den Flächeninhalt des Kreisrings gilt:

$$F = \pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \pi \cdot 100\text{cm}^2 \approx 314.16\text{cm}^2$$

Aufgabe OE3:

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P = (6, 3)$ zum Graphen der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Lösungsvorschlag 1:

Sei $A_x = (x, x^2)$ (mit $x \in \mathbb{R}$) ein beliebiger Punkt des Graphen von f . Wir bezeichnen das Quadrat des Abstands von P zu A_x mit:

$$h(x) = \overline{PA_x}^2 \quad (\text{für } x \in \mathbb{R})$$

Dann gilt:

$$h(x) = (6 - x)^2 + (3 - x^2)^2 = 36 - 12x + x^2 + 9 - 6x^2 + x^4 = x^4 - 5x^2 - 12x + 45 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ziel ist es nun $x \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass $\overline{PA_x}$ minimal wird.

Da der Abstand von A_x zu P nicht negativ werden kann, ist er genau dann minimal, wenn sein Quadrat minimal ist, wir suchen also die globale Minimumstelle der Funktion:

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^4 - 5x^2 - 12x + 45$$

$$\text{Es gilt: } h'(x) = 4x^3 - 10x - 12 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Durch Ausprobieren findet man die Nullstelle $x = 2$ von h' .

Eine Polynomdivision ergibt:

$$h'(x) = 4x^3 - 10x - 12 = (x - 2) \cdot (4x^2 + 8x + 6)$$

Wegen

$$4x^2 + 8x + 6 = 4 \cdot \left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left((x + 1)^2 + \frac{1}{2}\right) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

stimmt das Vorzeichen von $h'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit dem von $x - 2$ überein.

Folglich ist:

$$h'(x) < 0 \text{ für alle } x < 2 \Rightarrow h \text{ ist streng monoton fallend auf }]-\infty, 2]$$

$$h'(x) > 0 \text{ für alle } x > 2 \Rightarrow h \text{ ist streng monoton fallend auf } [2, -\infty[$$

Also ist $x = 2$ die globale Minimumstelle von h .

Der gesuchte minimale Abstand von P zum Graphen von f ergibt sich nun als:

$$\sqrt{h(2)} = \sqrt{2^4 - 5 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 45} = \sqrt{16 - 20 - 24 + 45} = \sqrt{17}$$

Lösungsvorschlag 2:

Sei $A = (x, y)$ der Punkt des Graphen von f , der von P minimalen Abstand hat. Dann gilt:

- (1) Da A auf dem Graphen von f liegt, gilt: $y = x^2$
- (2) Die Gerade durch die Punkte A und P steht senkrecht auf dem Graphen von f , das heißt die Steigungen der Geraden (also $\frac{y-3}{x-6}$) und die Steigung des Graphen von f im Punkt A (also $f'(x) = 2x$) multiplizieren sich zu -1 .

$$\text{Also: } \frac{y-6}{x-3} \cdot 2x = -1$$

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt:

$$\frac{x^2-3}{x-6} \cdot 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 - 6x = -x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^3 - \frac{5}{2}x - 3}_{\stackrel{\text{def}}{=} h(x)} = 0$$

Durch Ausprobieren findet man die Nullstelle $x = 2$ von h .

Eine Polynomdivision ergibt:

$$h(x) = x^3 - \frac{5}{2}x - 3 = (x-2) \cdot \left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)$$

Wegen

$$x^2 + 2x + \frac{3}{2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{2} = (x+1)^2 + \frac{1}{2} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

hat h keine weitere Nullstelle.

Folglich ist $x = 2$ und damit $A = (2, 4)$.

Der gesuchte minimale Abstand von P zum Graphen von f ergibt sich nun als:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{(2-6)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

Hilfsmittel für den Gruppenwettbewerb, Klassenstufen 11/12

Je nach Lösungsweg können Sie möglicherweise die folgenden Werte der trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tan$ nutzen. (Es gibt auch Lösungsmöglichkeiten für alle Aufgaben ohne Verwendung dieser Werte.)

Winkel α (im Gradmaß)	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Aufgabe OG1:

Für wieviele natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 100$ ist die Zahl n^n eine Quadratzahl?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

- Ist n gerade (also $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$), so ist n^n eine Quadratzahl, denn es gilt:

$$n^n = n^{2k} = (n^k)^2$$

- Ist n eine Quadratzahl (also $n = a^2$ mit $a \in \mathbb{N}$), so ist n^n eine Quadratzahl, denn es gilt:

$$n^n = (a^2)^n = (a^n)^2$$

- Ist n weder gerade, noch eine Quadratzahl, so gilt:

Da n keine Quadratzahl ist, kommt in der Primfaktorzerlegung von n (mindestens) eine Primzahl p mit einer ungeraden Potenz e vor, also:

$$n = p^e \cdot \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{weitere Primzahlpotenzen}}$$

In der Primfaktorzerlegung von n^n kommt dann p mit der Potenz $n \cdot e$ vor, es gilt:

$$n^n = p^{n \cdot e} \cdot \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{weitere Primzahlpotenzen}}$$

Da n und e beide ungerade sind, ist die Potenz $n \cdot e$ von p in der Primfaktorzerlegung von n^n ebenfalls ungerade.

Somit kann n^n keine Quadratzahl sein (denn in der Primfaktorzerlegung einer Quadratzahlen kommen alle Primzahlen mit einer geraden Potenz vor).

Also haben wir gezeigt:

$$n^n \text{ ist Quadratzahl} \Leftrightarrow (n \text{ ist Quadratzahl oder } n \text{ ist gerade})$$

In der Menge $\{1, \dots, 100\}$ gibt 50 gerade Zahlen und zusätzlich noch 5 ungerade Quadratzahlen (1, 9, 25, 49, 81).

Also gibt es insgesamt $50 + 5 = 55$ Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 100$, für die die Zahl n^n eine Quadratzahl ist.

Aufgabe OG2:

Im Kaufhaus fährt eine Rolltreppe nach oben.

Am Montag stellt sich Knut auf die Rolltreppe. Er braucht 30 Sekunden nach oben.

Am Dienstag hat Knut es eilig und geht auf der fahrenden Rolltreppe nach oben.

Diesmal braucht er nur 12 Sekunden nach oben.

- (a) Am Mittwoch ist die Rolltreppe kaputt und steht still. Wie lange braucht Knut, um auf der stehenden Rolltreppe nach oben zu gehen ?
- (b) Am Donnerstag fährt die Rolltreppe abwärts. (Beim Reparieren ist den Technikern ein kleiner Fehler unterlaufen.) Wie lange braucht Knut, um auf der nach unten fahrenden Rolltreppe nach oben zu gehen ?

(Gehen Sie davon aus, dass die Geh-Geschwindigkeit von Knut stets konstant bleibt und auch dass die Rolltreppe immer mit derselben Geschwindigkeit fährt.)

Lösungsvorschlag:

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit der Rolltreppe mit v_R und die Geh-Geschwindigkeit von Knut mit v_K . Weiterhin sei ℓ die Länge der Rolltreppe. Nach den gegebenen Informationen gilt:

$$\begin{array}{llll} \text{(Montag)} & \frac{\ell}{v_R} & = & 30 \text{ sek} \quad \Leftrightarrow \quad v_R = \frac{\ell}{30 \text{ sek}} \\ \text{(Dienstag)} & \frac{\ell}{v_R + v_K} & = & 12 \text{ sek} \quad \Leftrightarrow \quad v_R + v_K = \frac{\ell}{12 \text{ sek}} \end{array}$$

- (a) (Mittwoch) Für die Geh-Geschwindigkeit von Knut gilt:

$$v_K = v_R + v_K - v_R = \frac{\ell}{12 \text{ sek}} - \frac{\ell}{30 \text{ sek}} = \frac{5 \cdot \ell}{60 \text{ sek}} - \frac{2 \cdot \ell}{60 \text{ sek}} = \frac{3 \cdot \ell}{60 \text{ sek}} = \frac{\ell}{20 \text{ sek}}$$

Folglich benötigt er die Zeit:

$$\frac{\ell}{v_K} = \frac{\ell}{\left(\frac{\ell}{20 \text{ sek}}\right)} = 20 \text{ sek}$$

- (b) (Donnerstag) Knut bewegt sich nun mit der Geschwindigkeit:

$$v_K - v_R = \frac{\ell}{20 \text{ sek}} - \frac{\ell}{30 \text{ sek}} = \frac{3 \cdot \ell}{60 \text{ sek}} - \frac{2 \cdot \ell}{60 \text{ sek}} = \frac{\ell}{60 \text{ sek}}$$

Folglich benötigt er die Zeit:

$$\frac{\ell}{v_K - v_R} = \frac{\ell}{\left(\frac{\ell}{60 \text{ sek}}\right)} = 60 \text{ sek}$$

Aufgabe OG3:

Gegeben seien zwei Kreise mit den Mittelpunkten $M_1 = (0,0)$ und $M_2 = (8,0)$. Beide haben den Radius 2.

Wir nennen eine Gerade eine **Doppelberührgerade**, falls sie beide Kreise in jeweils genau einem Punkt berührt.

(a) Wieviele Doppelberührgerade gibt es ?

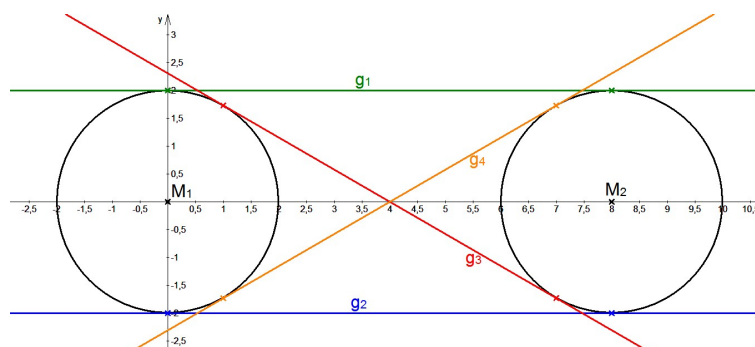
Erstellen Sie eine Skizze mit den beiden Kreisen und zeichnen Sie darin alle Doppelberührgeraden ein.

(b) Bestimmen Sie zu jeder Doppelberührgeraden:

- die Gleichung der Geraden
- die Koordinaten der Berührpunkte der Geraden mit den beiden Kreisen

Lösungsvorschlag:

(a) Es gibt 4 solche Geraden:



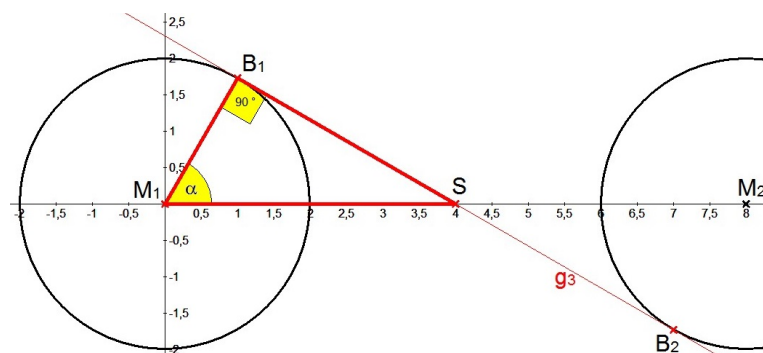
(b) • Zunächst gibt es offenbar zwei zur x -Achse parallele Geraden g_1 und g_2 :

Gerade	Gleichung	Berührpunkt mit dem Kreis um M_1	Berührpunkt mit Kreis um M_2
g_1	$y = 2$	$(0, 2)$	$(8, 2)$
g_2	$y = -2$	$(0, -2)$	$(8, -2)$

- Es existieren zwei weitere Geraden, die (aus Symmetriegründen) durch den Punkt $S = (4,0)$ verlaufen müssen.

Wir betrachten zunächst die Gerade g_3 (die den Kreis um M_1 in der oberen und den Kreis um M_2 in der unteren Halbebene berührt):

Sei B_1 der Berührpunkt von g_3 mit dem Kreis um M_1 . Das Dreieck $\triangle B_1 S M_1$ hat einen rechten Winkel bei B_1 . Es sei $\alpha = \angle S M_1 B_1$ der Winkel bei M_1 .



Es gilt: $\cos(\alpha) = \frac{|M_1B_1|}{|M_1S|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Somit ergibt sich: $B_1 = (2 \cdot \cos(60^\circ), 2 \cdot \sin(60^\circ)) = (1, \sqrt{3})$

Die Gerade g_3 hat also die Gleichung (2-Punkte-Form):

$$y = \frac{0 - \sqrt{3}}{4 - 1} \cdot (x - 4) + 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Der Berührungspunkt von g_3 mit dem Kreis um M_2 ergibt sich analog: $B_2 = (7, -\sqrt{3})$

Analog behandelt man die Gerade g_4 . Zusammengefasst ergibt sich:

Gerade	Gleichung	Berührungspunkt mit dem Kreis um M_1	Berührungspunkt mit dem Kreis um M_2
g_3	$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x + \frac{4}{\sqrt{3}}$	$(1, \sqrt{3})$	$(7, -\sqrt{3})$
g_4	$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x - \frac{4}{\sqrt{3}}$	$(1, -\sqrt{3})$	$(7, \sqrt{3})$

Aufgabe OG4:

Ein rechteckiges Blatt Papier $ABCD$ hat die Maße $12\text{cm} \times 16\text{cm}$.

Die Ecke A bleibt fest auf dem Tisch liegen. Wenn man die diagonal gegenüberliegende Ecke C auf A faltet, so entsteht in dem Blatt ein gerader Knick.

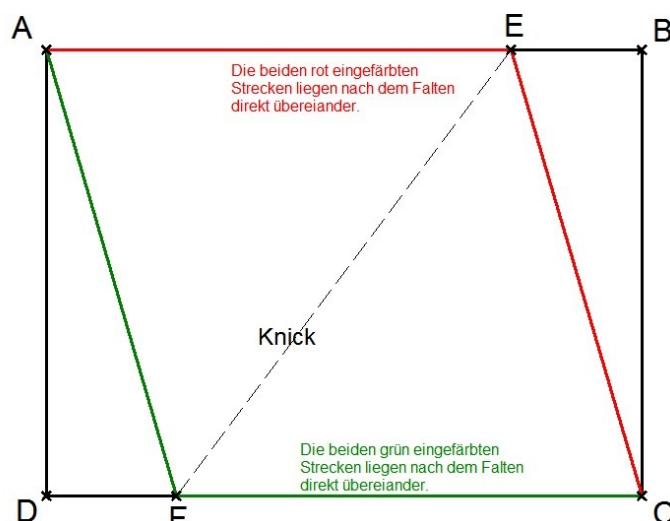
Wie lang ist dieser Knick?

Lösungsvorschlag:

Wir bezeichnen die Ecken des Blatts mit A, B, C, D (im Uhrzeigersinn), wobei gelte:

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 16\text{cm} \quad \text{und} \quad |\overline{BC}| = |\overline{DA}| = 12\text{cm}$$

Die Ecken A und C sollen aufeinandergefaltet werden. Die Endpunkte des Knicks bezeichnen wir mit E (auf der Strecke $\overline{AB}$) und F (auf der Strecke $\overline{CD}$).



Nach dem Falten liegen die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{EC}$ sowie die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{FC}$ direkt übereinander. Folglich gilt:

$$|\overline{AE}| = |\overline{EC}| \quad \text{und} \quad |\overline{CF}| = |\overline{FA}|$$

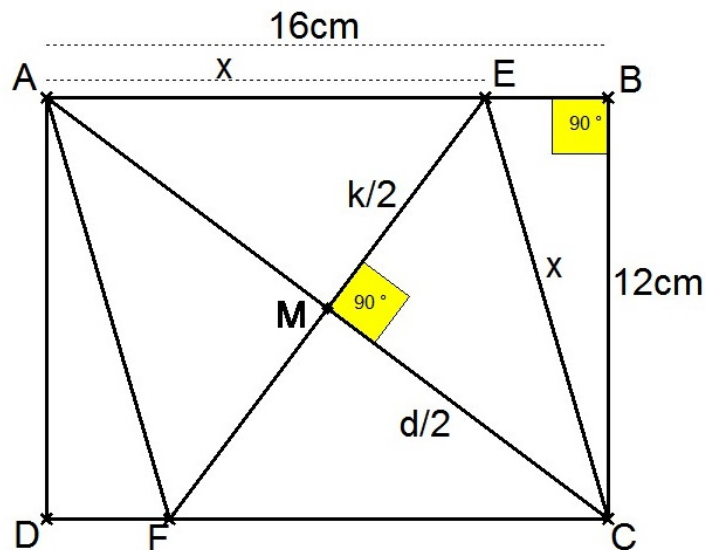
Aus Symmetriegründen sind sogar alle diese Streckenlängen gleich, es gilt:

$$x \stackrel{\text{def.}}{=} |\overline{AE}| = |\overline{EC}| = |\overline{CF}| = |\overline{FA}| \quad (\text{Also ist } \square AECF \text{ eine Raute.})$$

Wir betrachten nun den Mittelpunkt M des Rechtecks (der auf dem Knick liegen muss, da er der Mittelpunkt von A und C ist).

Das Dreieck $\triangle CME$ hat einen rechten Winkel bei M (da sich die Diagonalen der Raute $\square AECF$ rechtwinklig schneiden bzw. da der Knick die Mittelsenkrechte von A und C bildet).

Es bezeichne $d = |\overline{AC}|$ die Diagonalenlänge und $k = |\overline{EF}|$ die (gesuchte) Länge des Knicks.



Offenbar gilt: $d = \sqrt{(12\text{cm})^2 + (16\text{cm})^2} = 20\text{cm}$

Im Dreieck $\triangle EBC$ sieht man weiterhin:

$$\begin{aligned} |\overline{EC}|^2 &= |\overline{EB}|^2 + |\overline{BC}|^2 \Leftrightarrow x^2 = (12\text{cm})^2 + (16\text{cm} - x)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 144\text{cm}^2 + 256\text{cm}^2 - 32\text{cm} \cdot x + x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{400\text{cm}^2}{32\text{cm}} = 12,5\text{cm} \end{aligned}$$

Nun folgt im Dreieck $\triangle EBC$ gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 &= x^2 \Leftrightarrow \frac{k^2}{4} + (10\text{cm})^2 = (12,5\text{cm})^2 \\ &\Leftrightarrow k^2 = 4 \cdot (156,25\text{cm}^2 - 100\text{cm}^2) = 225\text{cm}^2 \\ &\Leftrightarrow k = 15\text{cm} \end{aligned}$$

Aufgabe OS1:

Die Seiten eines Buches werden fortlaufend durchnummeriert (beginnend mit Seite 1).

Die Seitenzahlen haben zusammen 999 Ziffern.

Wieviele Seiten hat das Buch?

Lösungsvorschlag:

Es gibt 9 einstellige Zahlen, diese haben insgesamt $9 \cdot 1 = 9$ Ziffern.

Es gibt 90 zweistellige Zahlen, diese haben insgesamt $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern.

Die dreistelligen Seitenzahlen des Buches müssen also zusammen $999 - 180 - 9 = 810$ Ziffern haben.

Das Buch hat somit $810 : 3 = 270$ dreistellige Seitenzahlen.

Da die erste dreistellige Seitenzahl die 100 ist, hat die letzte Seite des Buches die Seitenzahl $270 + 100 - 1 = 369$.

Das Buch hat also 369 Seiten.

Aufgabe OS2:

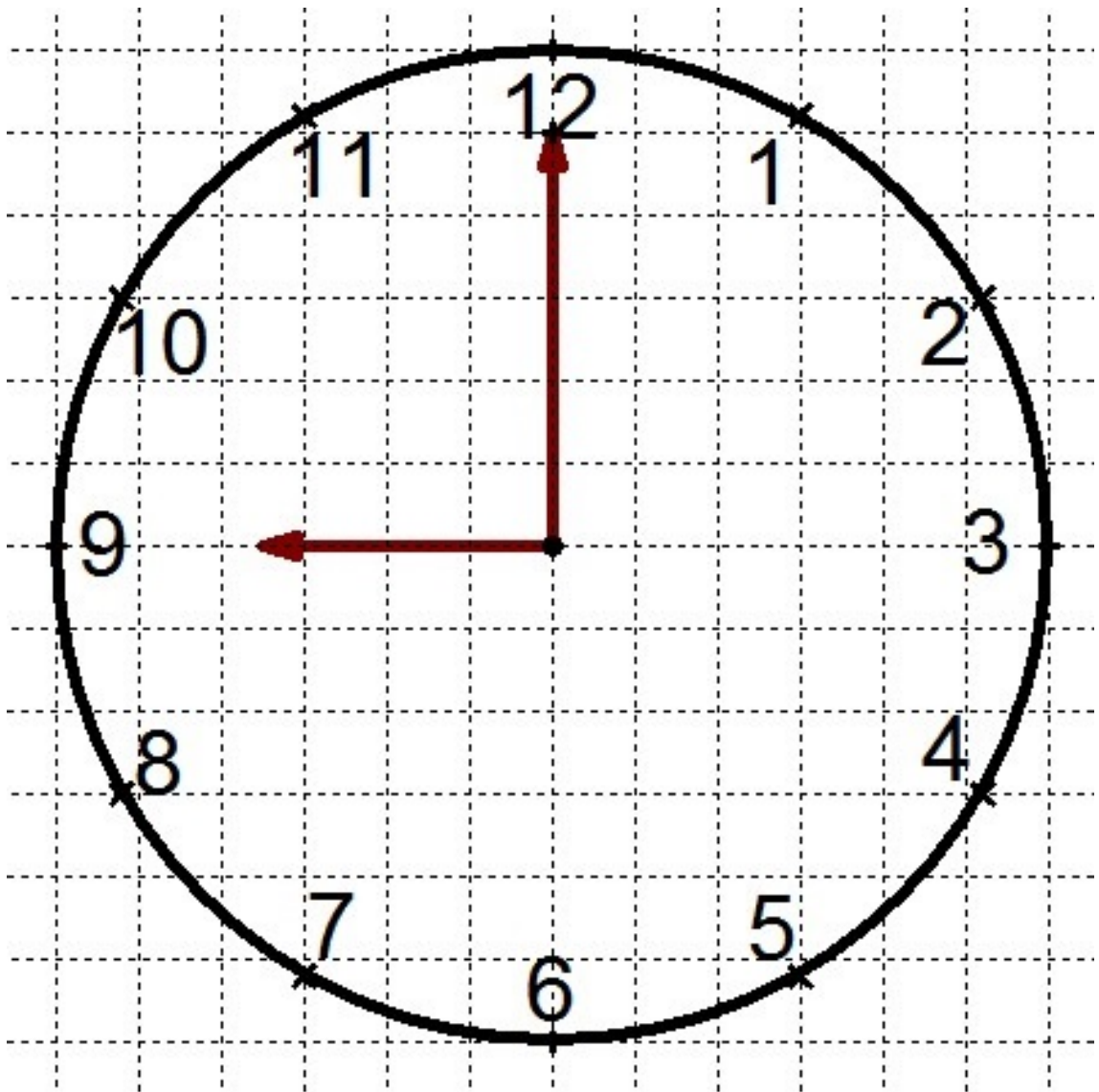
Eine Schnecke sitzt im Mittelpunkt einer Kirchturmuhhr auf dem Minutenzeiger.

Um Punkt 9:00 Uhr beginnt sie mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Zeiger nach außen zu kriechen.

Um 10:30 macht sie eine Pause von 60 Minuten, dann kriecht sie weiter.

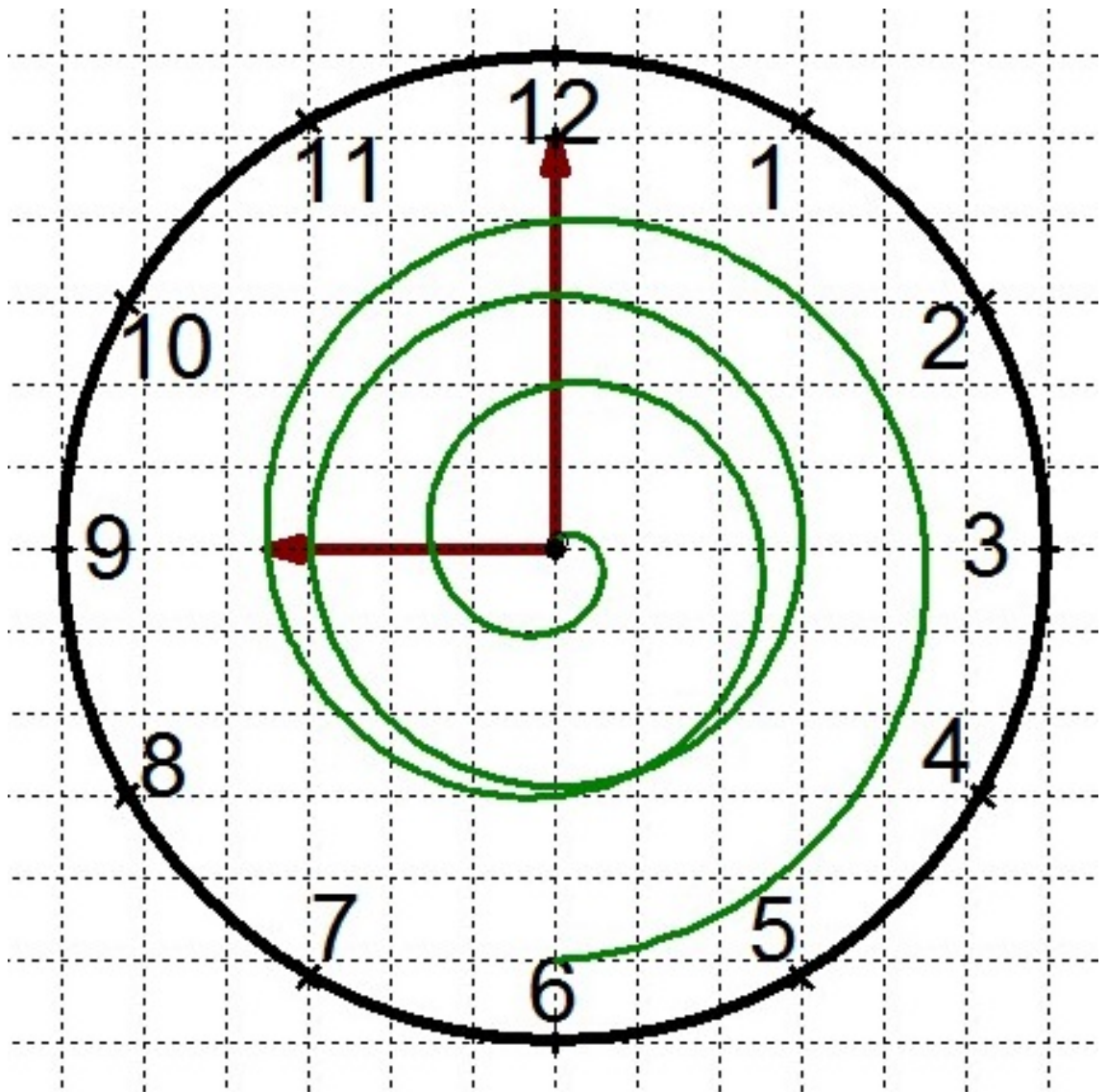
Sie erreicht die Spitze des Zeigers um 12:30 Uhr.

Skizzieren Sie den Weg der Schnecke auf dem Ziffernblatt.



Anmerkung: Die Skizze muss nicht exakt sein.

Lösungsvorschlag:



Aufgabe OS3:

Knut hat Gewichte zu 2kg, 5kg und 10kg.

Er wählt 10 Gewichte aus. Diese wiegen zusammen genau 40kg.

Wieviele Gewichte jeder Sorte hat Knut ausgewählt?

Lösungsvorschlag:

Es bezeichne:

- x die Anzahl der 2kg-Gewichte
- y die Anzahl der 5kg-Gewichte
- z die Anzahl der 10kg-Gewichte

Dann gelten die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad x + y + z &= 10 \\ \text{(II)} \quad 2x + 5y + 10z &= 40 \end{aligned}$$

Löst man Gleichung (I) nach x auf, so erhält man: $x = 10 - y - z$

Setzt man dies in (II) ein, so folgt:

$$2(10 - y - z) + 5y + 10z = 40 \quad \Leftrightarrow \quad 20 - 2y - 2z + 5y + 10z = 40 \quad \Leftrightarrow \quad 3y + 8z = 20$$

Offenbar müssen $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ sein. Durch Ausprobieren findet man die einzige Lösungskombination der Gleichung $3y + 8z = 20$ mit zwei natürlichen Zahlen: $y = 4, z = 1$

Durch Einsetzen in (I) ergibt sich: $x = 10 - y - z = 10 - 4 - 1 = 5$

Also hat Knut

- 5 Gewichte zu 2kg
- 4 Gewichte zu 5kg
- 1 Gewicht zu 10kg

ausgewählt.

Anmerkung: Natürlich kann man die Lösung auch einfach durch Ausprobieren bestimmen.

Aufgabe OS4:

4 nicht unterscheidbare Schnüre werden so unter ein Tuch gelegt, dass die beiden Enden einer jeden Schnur auf gegenüberliegenden Seiten des Tuches hervorstehen. (Unter dem Tuch liegen die Schnüre kreuz und quer durcheinander.)

Nun werden auf jeder Seite des Tuches aus den 4 hervorstehenden Enden zufällig 2 Paare gebildet und diese jeweils miteinander verknotet.

Dann wird das Tuch weggezogen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 4 Schnüre nun einen einzigen geschlossenen Ring bilden ?

Lösungsvorschlag:

Wir bezeichnen die Enden der Schnüre mit $L_1, \dots, L_4$ (linke Seite des Tuches) bzw. $R_1, \dots, R_4$ (rechte Seite des Tuches). Dabei sollen L_j und R_j für festes $j \in \{1, \dots, 4\}$ zur selben Schnur gehören.

Die Numerierung soll dabei so gewählt werden, dass L_1 mit L_2 und L_3 mit L_4 verknotet ist.

Nun gibt es die folgenden Möglichkeiten:

Fall 1: Falls R_1 mit R_2 verknotet ist, muss R_3 mit R_4 verknotet sein und es ergeben sich zwei geschlossene Ringe, nämlich:

$$L_1 \bowtie L_2 \leftrightarrow R_2 \bowtie R_1 \leftrightarrow L_1 \quad \text{und} \quad L_3 \bowtie L_4 \leftrightarrow R_4 \bowtie R_3 \leftrightarrow L_3$$

Fall 2: Falls R_1 mit R_3 verknotet ist, muss R_2 mit R_4 verknotet sein und es ergibt sich ein einziger geschlossener Ring nämlich:

$$L_1 \bowtie L_2 \leftrightarrow R_2 \bowtie R_4 \leftrightarrow L_4 \bowtie L_3 \leftrightarrow R_3 \bowtie R_1 \leftrightarrow L_1$$

Fall 3: Falls R_1 mit R_4 verknotet ist, muss R_2 mit R_3 verknotet sein und es ergibt sich ein einziger geschlossener Ring nämlich:

$$L_1 \bowtie L_2 \leftrightarrow R_2 \bowtie R_3 \leftrightarrow L_3 \bowtie L_4 \leftrightarrow R_4 \bowtie R_1 \leftrightarrow L_1$$

Da in zwei der drei Fällen ein einziger geschlossener Ring entsteht und da alle Fälle gleichwahrscheinlich sind, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 4 Schnüre nun einen einzigen geschlossenen Ring bilden: $\frac{2}{3}$

Aufgabe OS5:

In den Zahlen a und b kommt die Ziffer 0 nicht vor. a ist kleiner als b . Das Produkt von a und b beträgt 10000.

Bestimmen Sie a und b .

Lösungsvorschlag:

Es ist: $10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4$

Da in einer der Zahlen a und b nicht beide Primfaktoren 2 und 5 vorkommen dürfen (sonst wäre die Zahl durch 10 teilbar und würde auf 0 enden) ist die einzige Möglichkeit:

$$a = 2^4 = 16 \quad \text{und} \quad b = 5^4 = 625$$

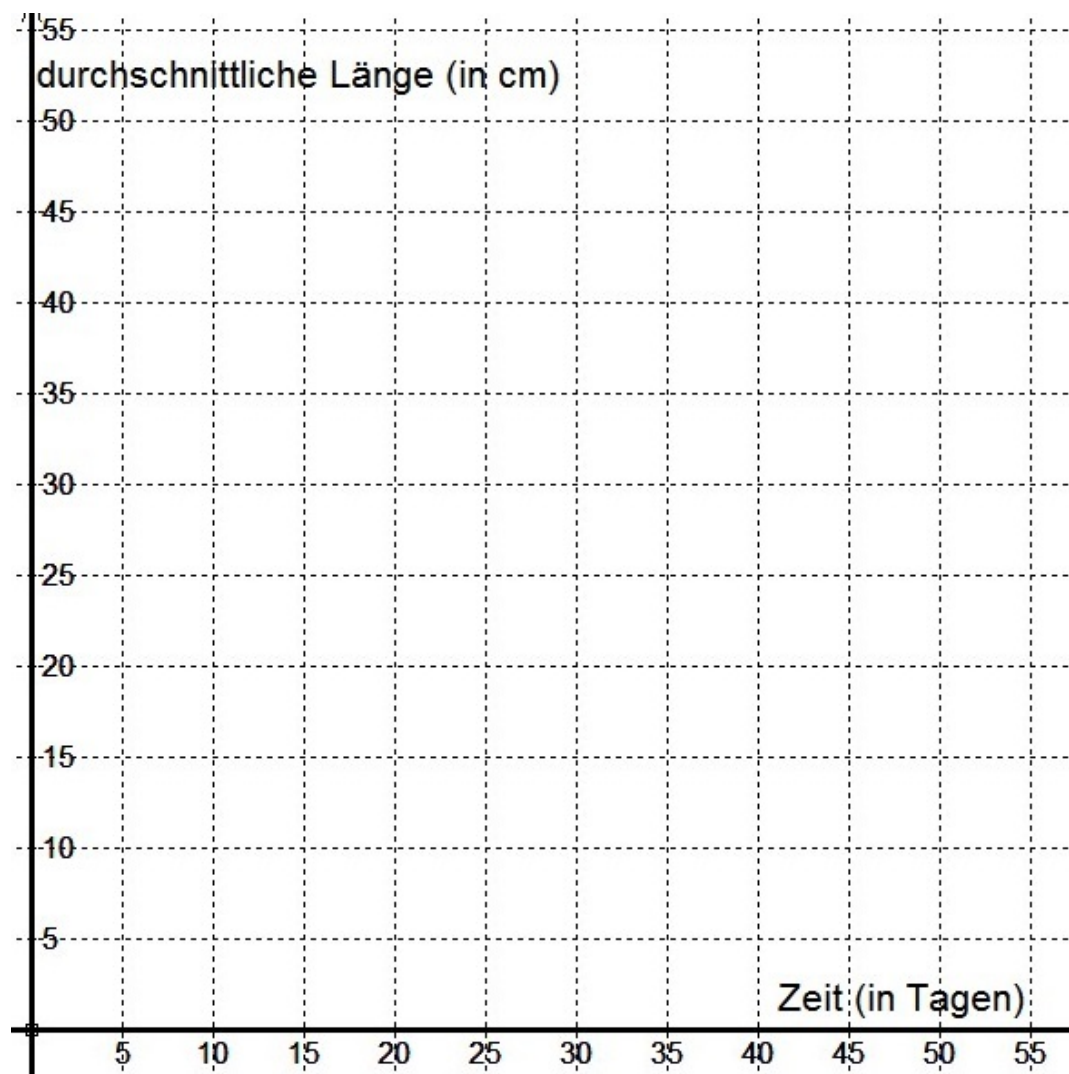
Aufgabe OS6:

In einem Garten werden Blumen gepflanzt. Jede der Blumen wächst pro Tag um 1 cm .

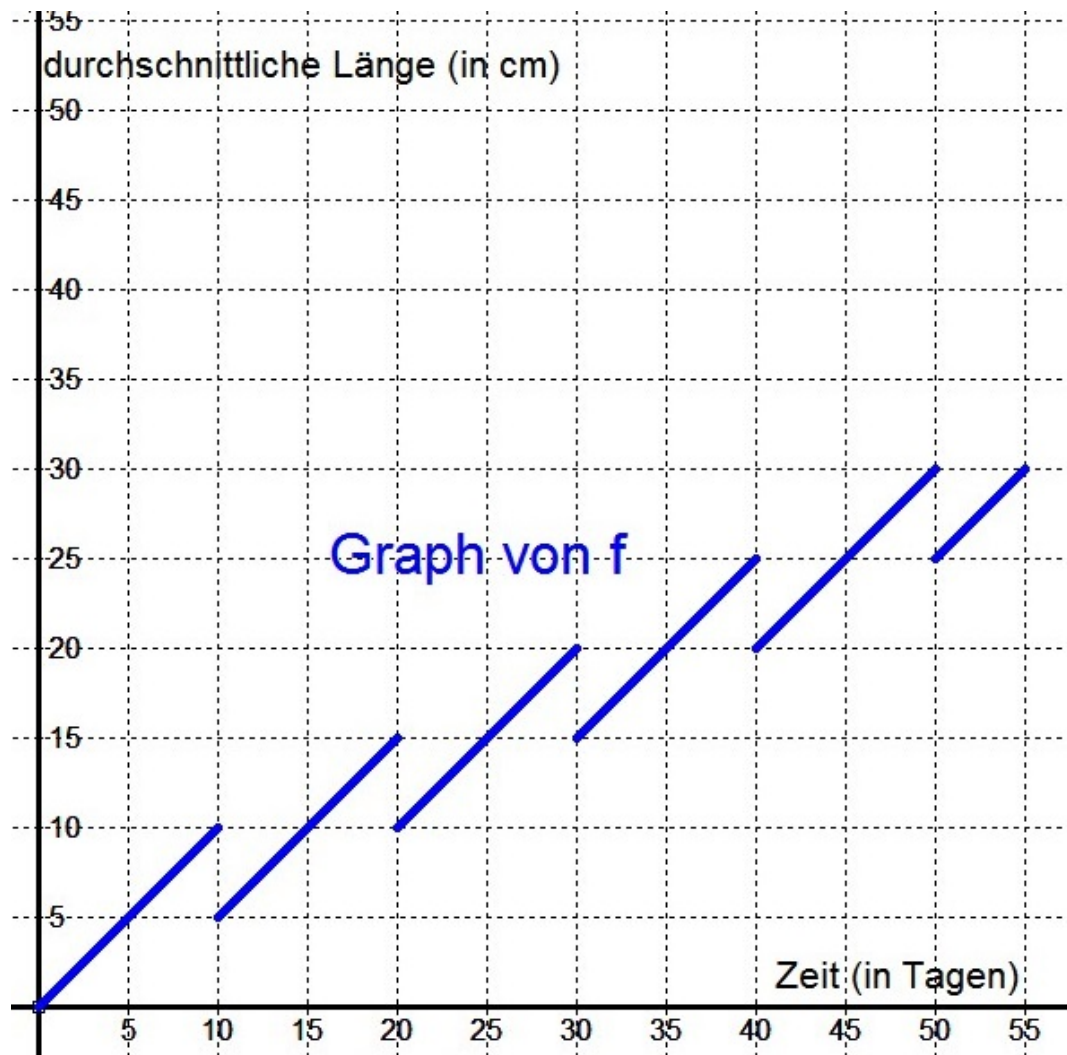
Zum Zeitpunkt 0 wird die erste Blume gepflanzt. 10 Tage später wird die zweite Blume gepflanzt, weitere 10 Tage später die nächste und so weiter.

Die Funktion f gibt die durchschnittliche Länge aller vorhandenen Blumen in Abhängigkeit von der Zeit an.

Tragen Sie in das folgende Schaubild den Graphen der Funktion f über dem Intervall $[0, 55]$ ein.

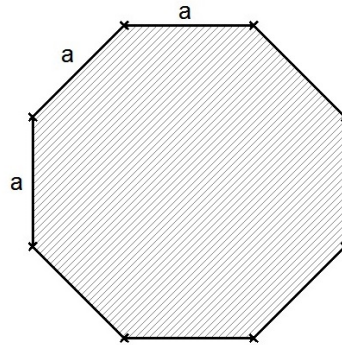


Lösungsvorschlag:



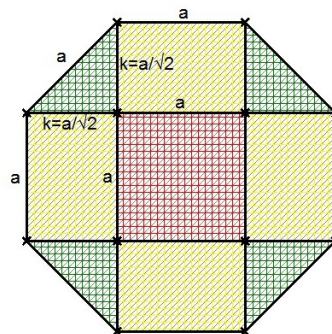
Aufgabe OS7:

Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen 8-Ecks in Abhängigkeit seiner Seitenlänge a ?



Lösungsvorschlag:

Das Achteck kann wie folgt in 4 Dreiecke, 4 Rechtecke und 1 Quadrat zerlegt werden:



- Die grün dargestellten Dreiecke sind rechtwinklig und gleichschenkelig mit Hypothenusenlänge a . Somit ergibt sich für die Kathetenlänge k :

$$k^2 + k^2 = a^2 \Rightarrow k^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow k = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Somit ergibt sich für den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks:

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot k^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

- Die gelb dargestellten Rechtecke haben jeweils die Seitenlängen a und $k = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und somit den Flächeninhalt: $F_R = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$
- Die Seitenlänge des rot dargestellten Quadrats entspricht der Seitenlänge des Achtecks a . Somit ergibt sich der Flächeninhalt des Quadrats als: $F_Q = a^2$

Die Gesamtfläche des Achtecks ergibt sich nun als:

$$F = 4 \cdot F_D + 4 \cdot F_R + F_Q = 4 \cdot \frac{a^2}{4} + 4 \cdot \frac{a^2}{\sqrt{2}} + a^2 = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot a^2$$

Aufgabe OS8:

Gegeben seien zwei sechseckige Würfel, die mit Zahlen beschriftet werden dürfen.

Ziel ist es, dass beim Werfen dieser beiden Würfel, alle Augensummen zwischen 1 und 36 auftreten können.

Wie muss man die Würfel dazu beschriften?

Hinweis: Die beiden Würfel dürfen unterschiedlich beschriftet werden. Es dürfen alle natürlichen Zahlen und auch die Zahl 0 für die Beschriftung verwendet werden.

Lösungsvorschlag:

1. Würfel:	1	,	2	,	3	,	4	,	5	,	6
2. Würfel:	0	,	6	,	12	,	18	,	24	,	30

ODER

1. Würfel:	0	,	1	,	2	,	3	,	4	,	5
2. Würfel:	1	,	7	,	13	,	19	,	25	,	31