

Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

mit Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben OE1, OE2, OE3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OE1:

Heute vor genau 5 Jahren (also am 20.03.2013) betrug das Durchschnittsalter der Mitglieder einer Familie exakt 22 Jahre. Irgendwann in den letzten 5 Jahren wurde ein weiteres Kind dieser Familie geboren.

Heute (also am 20.03.2018) beträgt das Durchschnittsalter der Familie erneut exakt 22 Jahre.

Wann wurde das Kind geboren? Aus wievielen Personen besteht die Familie heute?

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OE1:

Sei n die Anzahl der Personen der Familie heute, sei x das Alter des Kindes heute und sei S die Summe der Alter aller Familienmitglieder heute.

Da das Durchschnittsalter heute genau 22 Jahre beträgt, gilt:

$$\frac{S}{n} = 22 \quad \Leftrightarrow \quad S = 22n$$

Vor 5 Jahren bestand die Familie aus $n - 1$ Personen und die Summe der Alter aller Familienmitglieder war $S - (n - 1) \cdot 5 - x$ (denn $n - 1$ waren 5 Jahre jünger als heute und das Kind war noch nicht geboren).

Da das Durchschnittsalter auch zu diesem Zeitpunkt genau 22 Jahre betragen hat, gilt:

$$\frac{S - (n - 1) \cdot 5 - x}{n - 1} = 22 \quad \Leftrightarrow \quad S - 5n + 5 - x = 22n - 22 \quad \stackrel{S=22n}{\Leftrightarrow} \quad -5n + 5 - x = -22 \quad \Leftrightarrow \quad 27 = 5n + x$$

Da $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq 5$ gilt, folgt: $n = 5$ und $x = 2$.

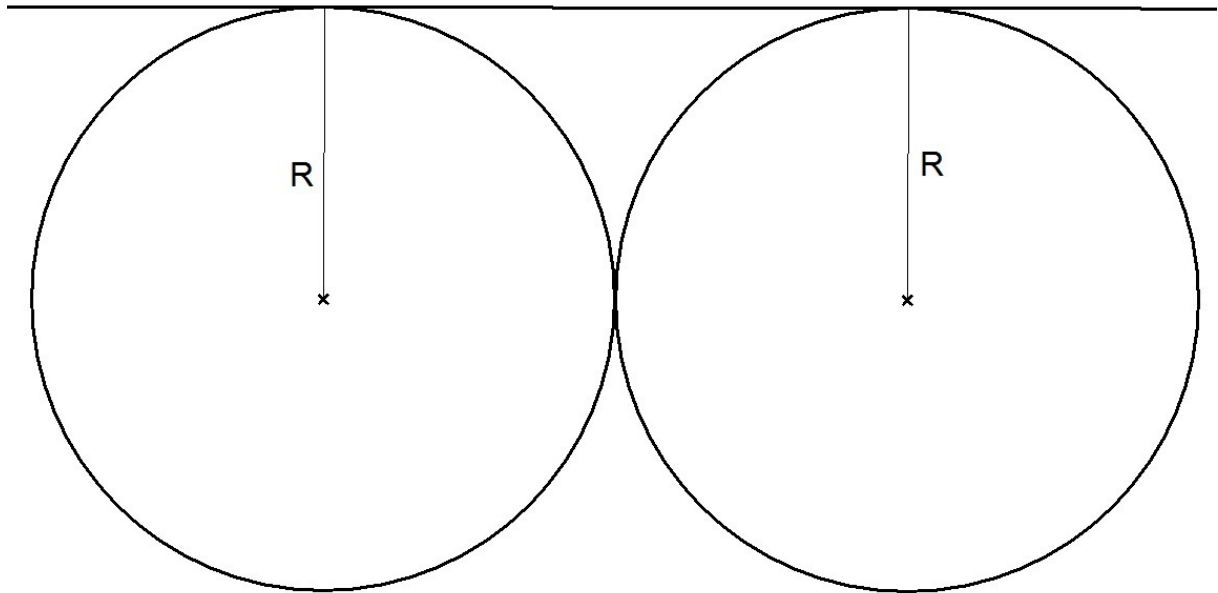
Die Familie besteht heute also aus genau 5 Personen.

Das Kind ist heute exakt 2 Jahre alt, wurde also am 20.03.2016 geboren.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OE2:

Gegeben seien zwei Kreise mit gleichem Radius R , die einander in einem Punkt berühren, sowie eine gemeinsame Tangente an beide Kreise.



Innerhalb der von beiden Kreisen und der Tangente begrenzten Fläche soll nun ein weiterer Kreis mit Radius r eingezeichnet werden.

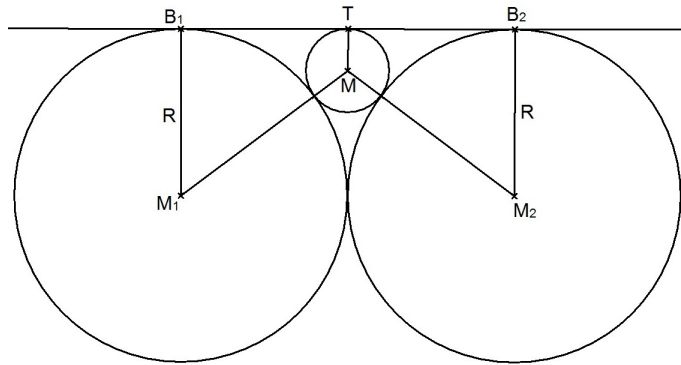
Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert für r in Abhängigkeit von R .

TAG DER MATHEMATIK 2018

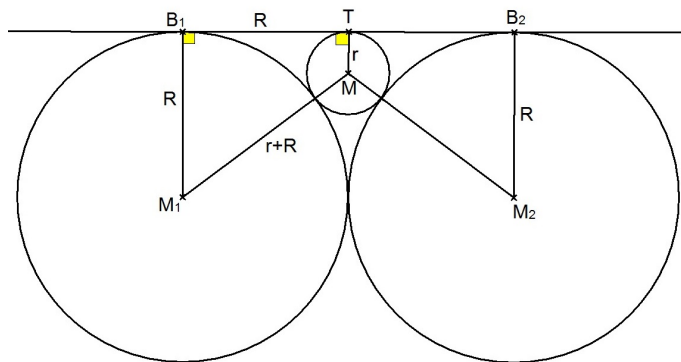
Lösung OE2:

Wir bezeichnen die beiden gegebenen Kreise mit k_1 und k_2 und ihre gemeinsame Tangente mit t . Weiterhin seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte von k_1 und k_2 und B_1 und B_2 die Berührungspunkte von t an k_1 bzw. k_2 .

Sei k der einzuzeichnende Kreis und M sein Mittelpunkt. Damit r maximal wird, muss k sowohl k_1 und k_2 als auch t berühren. Sei T der Berührungspunkt von t an k .

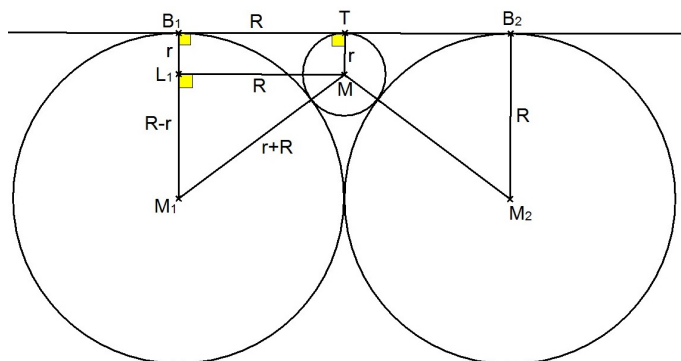


Wir betrachten nun $\square B_1 M_1 M T$. Dieses Viereck hat bei T und auch bei B_1 rechte Winkel (da die Tangente eines Kreises stets senkrecht zur Strecke zwischen Berührungspunkt und Kreismittelpunkt steht). Außerdem gilt: $|B_1 M_1| = R$, $|M_1 M| = r + R$, $|MT| = r$ und $|TB_1| = R$



Wir betrachten außerdem den Lotfußpunkt L_1 von M auf $\overline{B_1 M_1}$ und erhalten so ein Rechteck $\square B_1 L_1 M T$. Insbesondere ist $|L_1 M| = |TB_1| = R$ und:

$$|B_1 L_1| = |MT| = r \Rightarrow |L_1 M_1| = |B_1 M_1| - |B_1 L_1| = R - r$$



Der Satz des Pythagoras liefert im $\triangle M L_1 M_1$:

$$R^2 + (R - r)^2 = (r + R)^2 \Rightarrow R^2 + R^2 - 2rR + r^2 = r^2 + 2rR + R^2 \Rightarrow R^2 = 4rR \Rightarrow \frac{R}{4} = r$$

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OE3:

Von den vier Eckpunkten eines Quadrats liegen

- zwei auf der Geraden mit der Gleichung $y = 3$,
- zwei auf dem Graphen der Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$.

Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Eckpunkte.

Achtung: Die Lösung der Aufgabe ist nicht eindeutig. Finden Sie alle möglichen Lösungen.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OE3:

Seien A, B die beiden Punkte, die auf der Geraden mit der Gleichung $y = 3$ liegen und seien C, D die beiden Punkte, die auf der Normalparabel liegen.

Bei A und B und ebenso bei C und D muss es sich jeweils um benachbarte Eckpunkte des Quadrats handeln.

Begründung: Andernfalls wäre nämlich die Diagonale $\overline{AB}$ des Quadrats parallel zur x -Achse und damit müsste (da die Diagonalen eines Quadrats senkrecht aufeinander stehen) die andere Diagonale $\overline{CD}$ parallel zur y -Achse sein, jede Parallele zur y -Achse schneidet die Normalparabel aber nur genau einmal (da diese der Graph einer Funktion ist).

Die Strecke $\overline{CD}$, ist somit parallel zur Strecke $\overline{AB}$, diese ist aber wiederum parallel zur x -Achse.

Also haben auch die Punkte C und D dieselbe y -Koordinate $y_C = y_D$.

Wegen $x_C^2 = y_C$ und $x_D^2 = y_D$ folgt daraus $x_C^2 = x_D^2$ und damit folgt (denn es gilt sicherlich $x_C \neq x_D$, da sonst $C = D$ wäre) $x \stackrel{\text{def.}}{=} x_C = -x_D$.

Damit haben C und D die Koordinaten $C = (x, x^2)$ und $D = (-x, x^2)$. Wir benennen die Punkte dabei so, dass $x > 0$ ist.

Da nun (bei geeigneter Benennung der Punkte A, B, C, D) weiterhin $\overline{AD}$ sowie $\overline{BC}$ senkrecht zu $\overline{CD}$ stehen und $\overline{CD}$ parallel zur x -Achse ist, sind $\overline{AD}$ sowie $\overline{BC}$ parallel zur y -Achse. Damit hat A dieselbe x -Koordinate wie D und B dieselbe x -Koordinate wie C .

Also haben A und B die Koordinaten $A = (-x, 3)$ und $B = (x, 3)$.

Nun ergeben sich die Seitenlängen:

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = x - (-x) = 2x \quad \text{und} \quad |\overline{AD}| = |\overline{BC}| = |x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & , \quad \text{falls } x^2 > 3 \\ 3 - x^2 & , \quad \text{falls } x^2 < 3 \end{cases}$$

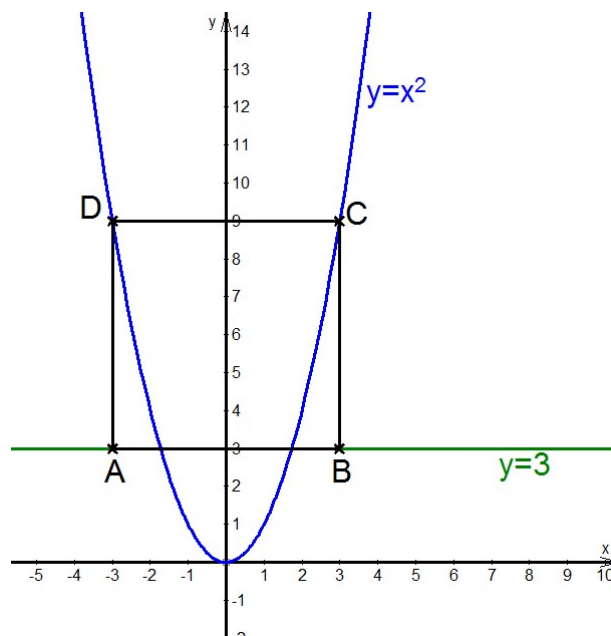
Es muss aber $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ gelten. Damit gilt:

im Fall $x^2 > 3$:

$$2x = x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x-1 = 2 \vee x-1 = -2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

Wegen $x > 0$ muss in diesem Fall also $x = 3$ gelten. Es ergeben sich dann die Eckpunkte:

$$A = (-3, 3) \quad , \quad B = (3, 3) \quad , \quad C = (3, 9) \quad , \quad D = (-3, 9)$$



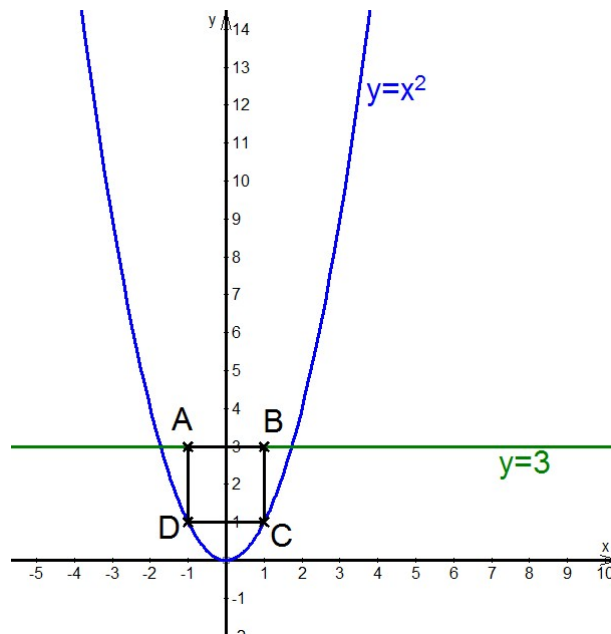
TAG DER MATHEMATIK 2018

im Fall $x^2 < 3$:

$$2x = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 \Leftrightarrow x+1 = 2 \vee x+1 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

Wegen $x > 0$ muss in diesem Fall also $x = 1$ gelten. Es ergeben sich dann die Eckpunkte:

$$A = (-1, 3) \quad , \quad B = (1, 3) \quad , \quad C = (1, 1) \quad , \quad D = (-1, 1)$$



TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OG1:

In einem Theater gibt es drei Preiskategorien A, B und C (wobei in jeder Preiskategorie auch Karten verkauft werden).

Eine Woche vor der Vorstellung stellt der Vorverkaufsleiter fest, dass

20% der Karten der Kategorie A

30% der Karten der Kategorie B

40% der Karten der Kategorie C

verkauft sind. Insgesamt sind zu diesem Zeitpunkt genau 28% aller Karten verkauft.

(a) Einen Tag vor der Vorstellung sind dann

30% der Karten der Kategorie A

50% der Karten der Kategorie B

70% der Karten der Kategorie C

verkauft. Welcher Anteil aller Karten ist nun insgesamt verkauft?

(b) Gesucht ist nun der Anteil p_A der Karten der Kategorie A unter allen Karten insgesamt.

Bestimmen Sie ein (möglichst genaues) Intervall, in dem p_A liegen muss.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OG1:

Seien a, b, c die Anzahl der verfügbaren Karten aus den Kategorien A, B, C .

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Nach Voraussetzung:} \quad & 0.2 \cdot a + 0.3 \cdot b + 0.4 \cdot c = 0.28 \cdot (a + b + c) \\ \Leftrightarrow & 0.4 \cdot a + 0.6 \cdot b + 0.8 \cdot c = 0.56 \cdot (a + b + c) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Außerdem:} \quad 0.1 \cdot a + 0.1 \cdot b + 0.1 \cdot c = 0.1 \cdot (a + b + c) \quad (2)$$

$$\text{Subtraktion (1)-(2):} \quad 0.3 \cdot a + 0.5 \cdot b + 0.7 \cdot c = 0.46 \cdot (a + b + c)$$

Also sind nun 46% aller Karten verkauft.

(b) Nach Voraussetzung gilt:

$$0.2 \cdot a + 0.3 \cdot b + 0.4 \cdot c = 0.28 \cdot (a + b + c) \Rightarrow 0.02 \cdot b + 0.12 \cdot c = 0.08 \cdot a \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot b + \frac{3}{2} \cdot c = a$$

Damit folgt:

$$p_A = \frac{a}{a + b + c} = \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot b + \frac{3}{2} \cdot c\right)}{\left(\frac{1}{4} \cdot b + \frac{3}{2} \cdot c + b + c\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot b + \frac{3}{2} \cdot c\right)}{\left(\frac{5}{4} \cdot b + \frac{5}{2} \cdot c\right)} = \frac{b + 6c}{5b + 10c}$$

Es gilt nun einerseits:

$$p_A = \frac{b + 6c}{5b + 10c} = \underbrace{\frac{b + 2c}{5b + 10c}}_{=\frac{1}{5}} + \underbrace{\frac{4c}{5b + 10c}}_{>0} > \frac{1}{5} = 0.2$$

Andererseits gilt:

$$p_A = \frac{b + 6c}{5b + 10c} = \underbrace{\frac{3b + 6c}{5b + 10c}}_{=\frac{3}{5}} - \underbrace{\frac{2b}{5b + 10c}}_{>0} < \frac{3}{5} = 0.6$$

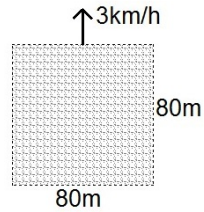
Also ist gezeigt, dass $p_A \in]0.2, 0.6[$ gilt.

Dieses Intervall kann nicht weiter verkleinert werden, da $p_A \approx \frac{1}{5}$ gilt, falls $c \ll b$ ist, und $p_A \approx \frac{3}{5}$ gilt, falls $b \ll c$ gilt. ($\ll$ bedeutet dabei: "ist viel kleiner als")

TAG DER MATHEMATIK 2018

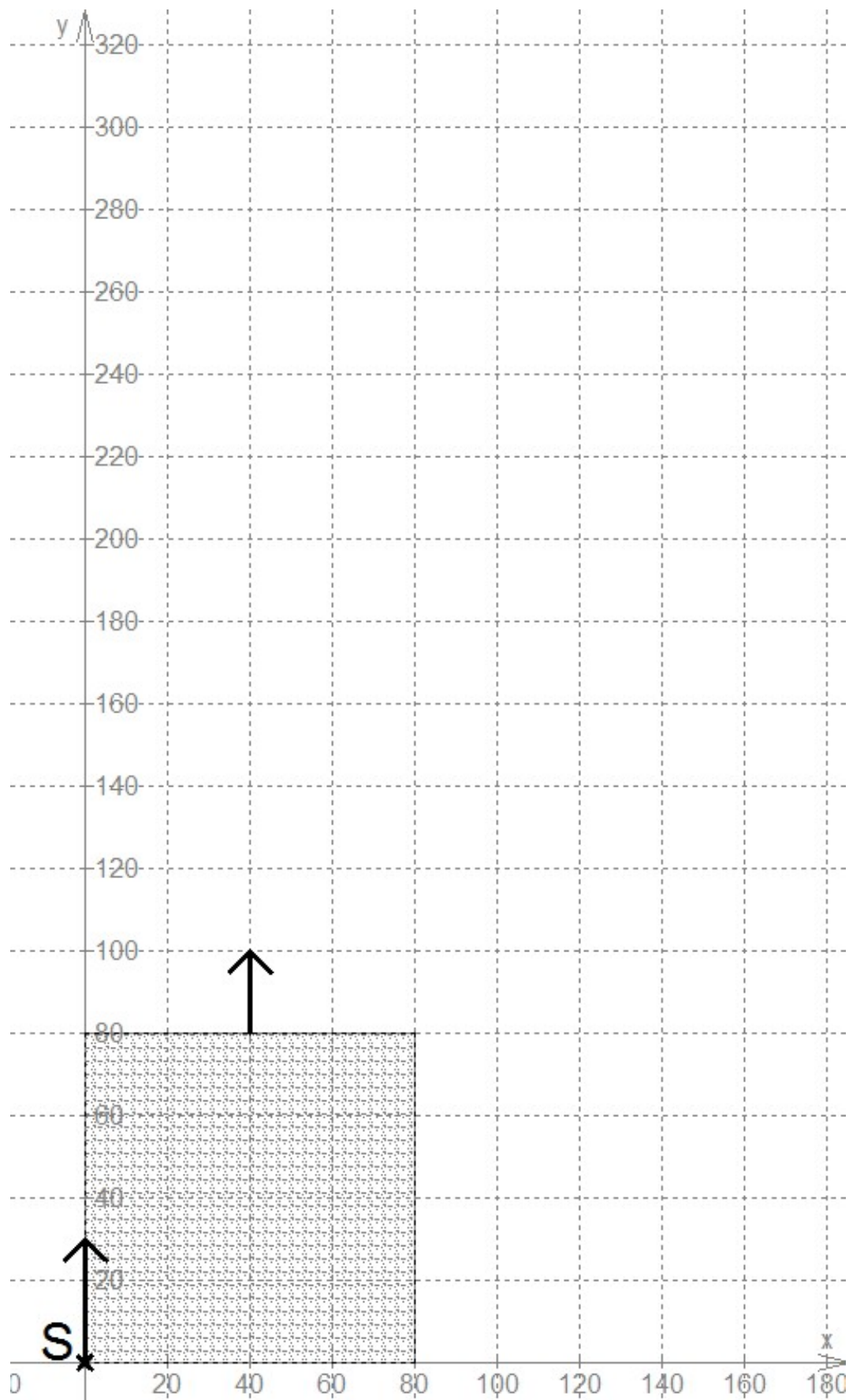
Aufgabe OG2:

Eine Schafherde bildet ein Quadrat mit 80 Metern Seitenlänge. Sie bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit von 3km/h in gerader Richtung (senkrecht zu einer Seite des Quadrats).



Ein Schäfer geht nun mit einer Geschwindigkeit von 5km/h um die Schafherde herum (er geht dabei immer genau am Rand der sich bewegenden Herde entlang).

- (a) Wie lange benötigt der Schäfer für eine Umrundung?
- (b) Zeichnen Sie in das Koordinatensystem auf dem nächsten Blatt den Weg des Schäfers in der Ebene ein, wenn er im Punkt S startet und die Schafherde einmal im Uhrzeigersinn umrundet.



TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OG2:

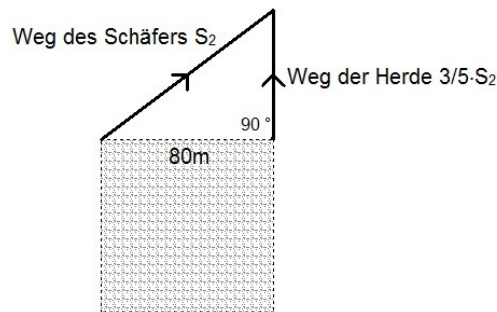
Wir nehmen an der Schäfer startet in der linken unteren Ecke und umrundet die Schafherde im Uhrzeigersinn. Dann muss er folgende Wegabschnitte bewältigen:

- 1.) In Laufrichtung der Herde muss der Schäfer 80 Meter weiter gehen als die Herde in derselben Zeit geht. Dazu benötigt er die Zeit T_1 mit

$$T_1 \cdot 5 \text{ km/h} - T_1 \cdot 3 \text{ km/h} = 80 \text{ m} \Rightarrow T_1 \cdot 2 \text{ km/h} = 80 \text{ m} \Rightarrow T_1 = \frac{80 \text{ m}}{2 \text{ km/h}} = 0.04 \text{ h}$$

Er legt dabei den Weg $S_1 = 0.04 \text{ h} \cdot 5 \text{ km/h} = 200 \text{ m}$ zurück.

- 2.) Schräg zur Laufrichtung der Herde entspricht die Wegstrecke S_2 des Schäfers der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei eine Kathete der Wegstrecke der Schafe und die andere Kathete der Breite der Herde (also 80m) entspricht.



Wegen der gegebenen Geschwindigkeiten entspricht die Wegstrecke der Herde $\frac{3 \text{ km/h}}{5 \text{ km/h}} \cdot S_2 = \frac{3}{5} \cdot S_2$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} S_2^2 &= \left(\frac{3}{5} \cdot S_2 \right)^2 + (80 \text{ m})^2 \Rightarrow S_2^2 - \frac{9}{25} \cdot S_2^2 = 6400 \text{ m}^2 \\ &\Rightarrow \frac{16}{25} \cdot S_2^2 = 6400 \text{ m}^2 \\ &\Rightarrow S_2^2 = \frac{25}{16} \cdot 6400 \text{ m}^2 \Rightarrow S_2 = \frac{5}{4} \cdot 80 \text{ m} = 100 \text{ m} \end{aligned}$$

Der Schäfer benötigt dafür die Zeit $T_2 = \frac{100 \text{ m}}{5 \text{ km/h}} = 0.02 \text{ h}$.

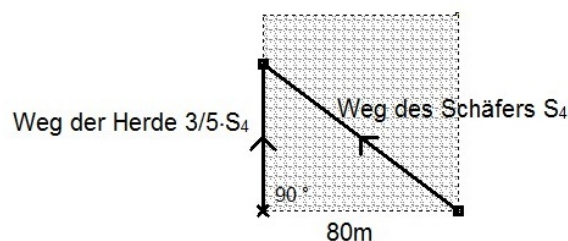
Die Herde legt in dieser Zeit die Strecke $\frac{3}{5} \cdot 100 \text{ m} = 60 \text{ m}$ zurück.

- 3.) Entgegen der Laufrichtung der Herde legen Schäfer und Herde zusammen 80 Meter zurück. Dazu benötigt er die Zeit T_3 mit

$$T_3 \cdot 5 \text{ km/h} + T_3 \cdot 3 \text{ km/h} = 80 \text{ m} \Rightarrow T_3 \cdot 8 \text{ km/h} = 80 \text{ m} \Rightarrow T_3 = \frac{80 \text{ m}}{8 \text{ km/h}} = 0.01 \text{ h}$$

Er legt dabei den Weg $S_3 = 0.01 \text{ h} \cdot 5 \text{ km/h} = 50 \text{ m}$ zurück.

- 4.) Schräg zur Laufrichtung der Herde entspricht die Wegstrecke S_4 des Schäfers der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei eine Kathete der Wegstrecke der Schafe und die andere Kathete der Breite der Herde (also 80m) entspricht.



Völlig analog zu 2.) berechnet man:

$$\text{Weg des Schäfers: } S_4 = 100\text{m}$$

$$\text{Weg der Herde: } \frac{3}{5} \cdot S_4 = 60\text{m}$$

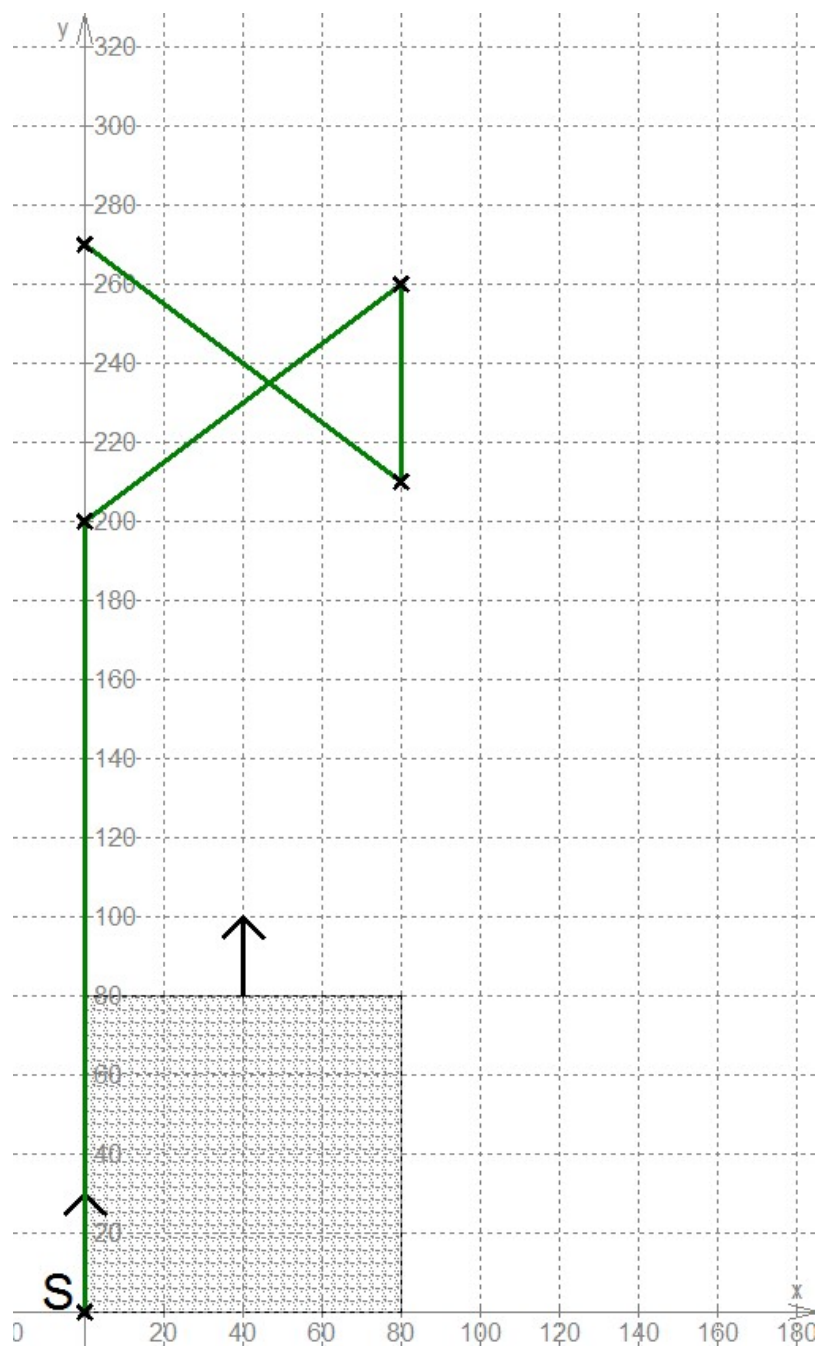
$$\text{benötigte Zeit: } T_4 = 0.02\text{h}$$

- (a) Nach obigen Berechnungen benötigt der Schäfer insgesamt für eine vollständige Umrundung der Schafherde die Zeit:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0.04\text{h} + 0.02\text{h} + 0.01\text{h} + 0.02\text{h} = 0.09\text{h} = 5.4\text{min} = 324\text{s}$$

- (b) Nach den obigen Berechnungen durchläuft der Schäfer den Streckenzug zwischen den Punkten (Angaben in Metern):

$$(0,0) \xrightarrow{(0,+200)} (0,200) \xrightarrow{(+80,+60)} (80,260) \xrightarrow{(0,-50)} (80,210) \xrightarrow{(-80,+60)} (0,270)$$



TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OG3:

Die 12 Zahlen 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 sollen auf die Seiten zweier 6-seitiger Würfel verteilt werden. (Dabei soll auf jeder Würfelseite genau eine Zahl stehen. Allerdings darf sich auch mehrfach dieselbe Zahl auf demselben Würfel befinden.)

- (a) Die 12 Zahlen werden zunächst völlig zufällig auf die Würfelseiten verteilt. Dann wird mit beiden Würfeln gewürfelt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Zahlen genau 7 beträgt?

- (b) Nun sollen die 12 Zahlen so verteilt werden, dass anschließend die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, möglichst groß ist.

Wie groß kann die Wahrscheinlichkeit für die Summe 7 maximal werden?

Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie dabei auch eine mögliche Verteilung der 12 Zahlen auf die Würfel an, für die die Wahrscheinlichkeit der Summe 7 maximal wird.

- (c) Nun sollen die 12 Zahlen so verteilt werden, dass anschließend die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, möglichst klein ist.

Wie klein kann die Wahrscheinlichkeit für die Summe 7 minimal werden?

Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie dabei auch eine mögliche Verteilung der 12 Zahlen auf die Würfel an, für die die Wahrscheinlichkeit der Summe 7 minimal wird.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OG3:

- (a) Sei a die Zahl, die der erste Würfel anzeigt. Unabhängig davon, welche Zahl dies ist, gibt es genau eine Zahl $b \in \{1, \dots, 6\}$ mit $a + b = 7$. Dabei gilt immer $a \neq b$.

Unter den verbleibenden 11 Zahlen (ausgenommen: einmal a), die auf die Würfel verteilt werden, sind also genau 2 (zweimal b) dabei, die zusammen mit a die Summe 7 ergeben.

Der zweite Würfel zeigt jede dieser 11 Zahlen mit derselben Wahrscheinlichkeit. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, genau $\frac{2}{11}$.

- (b) Wir verteilen die 12 Zahlen wie folgt: $\underbrace{1, 1, 2, 2, 3, 3}_{1. \text{ Würfel}}$ und $\underbrace{4, 4, 5, 5, 6, 6}_{2. \text{ Würfel}}$

Weitere Kombinationen sind möglich. Wichtig ist nur, dass beide 1en auf einem Würfel sind und beide 6en auf dem anderen Würfel, gleiches gilt für die beiden 2en und die beiden 5en, sowie für die beiden 3en und die beiden 4en.

Unabhängig davon, welche Zahl der 1. Würfel zeigt, führen nun 2 der 6 Zahlen auf dem 2. Würfel zur Summe 7. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Da (unabhängig von der Verteilung der 12 Zahlen und der Zahl, die der erste Würfel zeigt) niemals mehr als 2 der 6 Zahlen auf dem zweiten Würfel zur Summe 7 führen, kann die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, niemals $> \frac{1}{3}$ sein.

- (c) Wir verteilen die 12 Zahlen wie folgt: $\underbrace{1, 1, 2, 5, 6, 6}_{1. \text{ Würfel}}$ und $\underbrace{2, 3, 3, 4, 4, 5}_{2. \text{ Würfel}}$

Weitere Kombinationen sind möglich. Wichtig ist nur, dass sich alle Zahlen aus einem der Blöcke 1, 1, 6, 6 und 2, 2, 5, 5 und 3, 3, 4, 4 auf einem Würfel befinden, alle Zahlen aus einem weiteren dieser Blöcke auf dem anderen Würfel befinden und die Zahlen aus dem verbliebenen Block so auf die beiden Würfel aufgeteilt werden, dass auf jedem Würfel zwei verschiedene Zahlen dieses Blocks stehen.

Die Summe 7 kann nun nur entstehen, wenn

$$\begin{array}{l|l} \text{(der 1. Würfel eine 2 zeigt UND der 2. Würfel eine 5 zeigt)} & \text{Wahrscheinlichkeit: } \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\ \text{ODER (der 1. Würfel eine 5 zeigt UND der 2. Würfel eine 2 zeigt)} & \text{Wahrscheinlichkeit: } \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \end{array}$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln: $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

Wir begründen nun noch, dass diese Wahrscheinlichkeit nicht noch kleiner sein kann:

- Falls irgendeine Zahl $a \in \{1, \dots, 6\}$ und auch die Zahl $b = 7 - a$ auf beiden Würfeln vorkommt, kann die Summe 7 entstehen, wenn einer der Würfel die Zahl a zeigt und der andere Würfel die Zahl b (oder umgekehrt).

Dies sind 2 Möglichkeiten, die mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ eintreten. Also beträgt in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, mindestens $2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$.

- Falls irgendeine Zahl $a \in \{1, \dots, 6\}$ auf beiden Würfeln vorkommt und die Zahl $b = 7 - a$ nur auf einem Würfel vorkommt, kann die Summe 7 entstehen, wenn der 1. Würfel a zeigt und der 2. Würfel b .

Dies ist eine Möglichkeit, die mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ eintritt. Also beträgt in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, mindestens $\frac{1}{18}$.

Die Wahrscheinlichkeit muss dann sogar noch höher sein, da es weitere Kombinationen für die Summe 7 gibt.

- Falls keine Zahl auf beiden Würfeln vorkommt, befinden sich 3 Zahlen auf einem und die 3 anderen Zahlen auf dem anderen Würfel. Dann gibt es aber eine Zahl $a \in \{1, \dots, 6\}$, die (doppelt) auf dem 1. Würfel vorkommt, wobei $b = 7 - a$ (doppelt) auf dem 2. Würfel vorkommt. Die Summe 7 kann entstehen, wenn der 1. Würfel a und der 2. Würfel b zeigt.

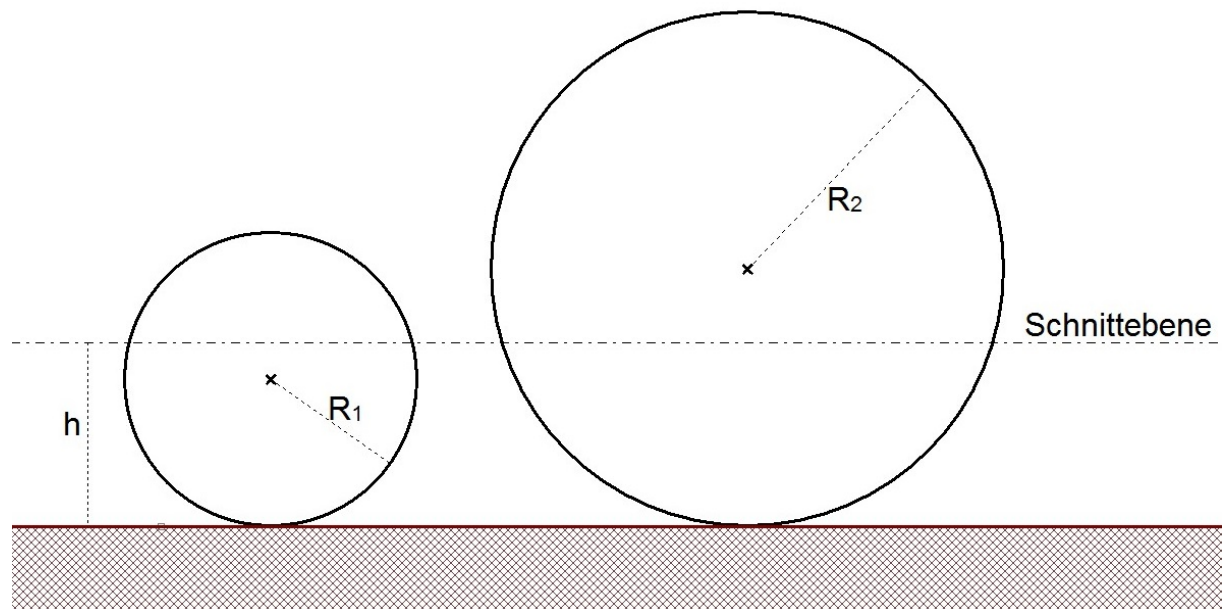
Dies ist eine Möglichkeit, die mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} > \frac{1}{18}$ eintritt. Also beträgt in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 zu würfeln, mehr als $\frac{1}{18}$.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OG4:

Zwei Holzkugeln mit den Radien R_1, R_2 (mit $0 < R_1 < R_2$) liegen auf einer Tischplatte.

Beide Kugeln sollen im selben Abstand h von der Tischplatte waagrecht durchgeschnitten werden.



Wie ist dabei h (in Abhängigkeit von R_1, R_2) zu wählen, damit die Summe der beiden entstehenden Schnittflächen maximal wird?

Bestimmen Sie auch den maximal möglichen Wert der Summe der beiden Schnittflächen (in Abhängigkeit von R_1, R_2).

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OG4:

Wir gehen zunächst davon aus, dass die gesuchte Höhe $h \leq 2R_1$ ist, damit werden beide Kugeln tatsächlich von der Schnittebene getroffen.

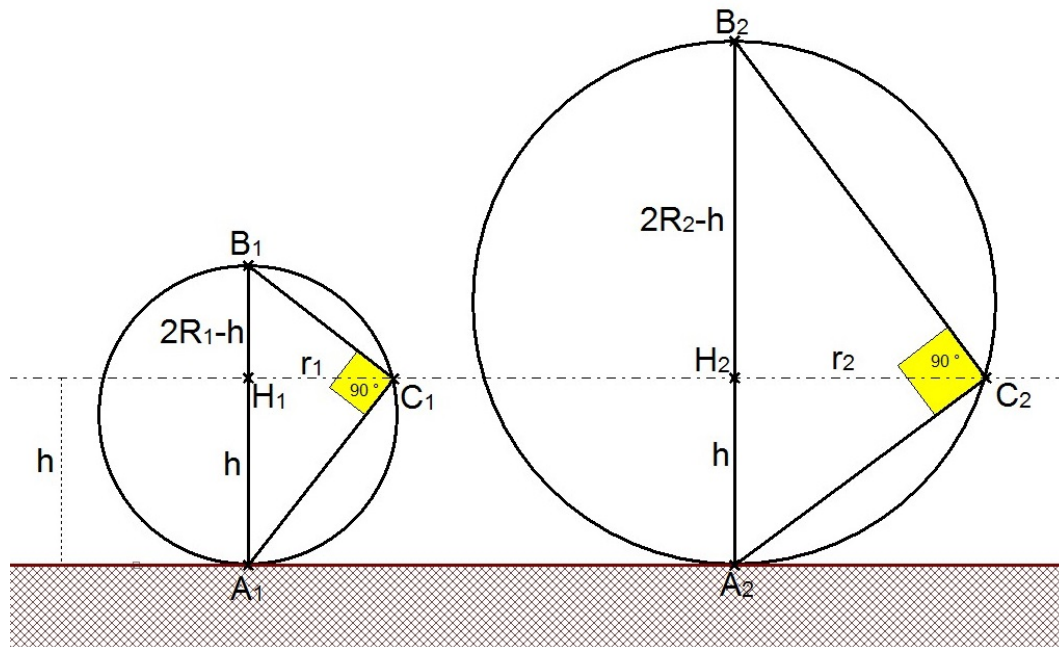
Die beiden Schnittflächen sind dann Kreise, deren Radien r_1 und r_2 wir nun bestimmen:

Sei A_1 der Auflagepunkt der ersten Kugel auf der Tischplatte und B_1 der höchste Punkt dieser Kugel. Weiterhin sei C_1 ein Punkt, der auf dem Rand der ersten Kugel und außerdem in der Schnittebene liegt. Weiterhin sei H_1 der Fußpunkt der Höhe zum Punkt C_1 im Dreieck $\triangle A_1 B_1 C_1$.

$\triangle A_1 B_1 C_1$ hat einen rechten Winkel bei C_1 , denn C_1 liegt auf einem (Thales-)Kreis mit dem Durchmesser $\overline{A_1 B_1}$. Folglich gilt nach dem Höhensatz:

$$|\overline{H_1 C_1}|^2 = |\overline{H_1 A_1}| \cdot |\overline{H_1 B_1}| \quad \Rightarrow \quad r_1^2 = h \cdot (2R_1 - h)$$

Analog erhält man: $r_2^2 = h \cdot (2R_2 - h)$



Die Summe der Schnittflächen ergibt sich nun in Abhängigkeit von h durch:

$$F(h) = \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot (h \cdot (2R_1 - h) + h \cdot (2R_2 - h)) = \pi \cdot h \cdot (2R_1 + 2R_2 - 2h) = 2\pi \cdot h \cdot (R_1 + R_2 - h)$$

Der Graph von $h \mapsto F(h)$ ist (für $0 \leq h \leq \min(2R_1, 2R_2)$) eine nach unten geöffneten Parabel mit den Nullstellen 0 und $R_1 + R_2$. Daher wird $F(h)$ maximal für $h = \frac{R_1 + R_2}{2}$. Für diesen Wert von h gilt:

$$F(h) = 2\pi \cdot \frac{R_1 + R_2}{2} \cdot \left(R_1 + R_2 - \frac{R_1 + R_2}{2} \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)^2 = \frac{\pi (R_1 + R_2)^2}{2}$$

Es ist auch denkbar, dass die gesuchte Höhe $h > 2R_1$ ist, damit würde nur die größere Kugel von der Schnittebene getroffen. Die Summe der Schnittflächen ist dann offenbar maximal, wenn die Schnittebene durch den Mittelpunkt der größeren Kugel verläuft, wenn also $h = R_2$ gilt. Für diesen Wert von h gilt $F(h) = \pi \cdot R_2^2$.

Ergebnis:

- Falls $\pi \cdot R_2^2 \leq \frac{\pi (R_1 + R_2)^2}{2}$ ($\Leftrightarrow R_1 \geq (\sqrt{2} - 1)R_2$) wird die Summe der Schnittflächen maximal für $h = \frac{R_1 + R_2}{2}$ und hat dann den Wert $\frac{\pi (R_1 + R_2)^2}{2}$.
- Falls $\pi \cdot R_2^2 \geq \frac{\pi (R_1 + R_2)^2}{2}$ ($\Leftrightarrow R_1 \leq (\sqrt{2} - 1)R_2$) wird die Summe der Schnittflächen maximal für $h = R_2$ und hat dann den Wert $\pi \cdot R_2^2$.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OS1:

In einem Buch stehen im Durchschnitt 8 Buchstaben auf einem Quadratzentimeter Papierfläche. Das Buch hat (ohne den Einband) ein Volumen von 0.02m^3 bei einer Papierdicke von 0.1mm .

Wieviele Buchstaben stehen in dem Buch?

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OS1:

Legt man alle Seiten des Buchs nebeneinander, so erhält man eine Fläche von

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{Dicke}} = \frac{0.02\text{m}^3}{0.1\text{mm}} = \frac{20000\text{cm}^3}{0.01\text{cm}} = 2000000\text{cm}^2$$

Da diese Fläche doppelt beschrieben ist und im Durchschnitt 8 Buchstaben auf einem Quadrat-zentimeter Papierfläche stehen, beträgt die Anzahl der Buchstaben in dem Buch:

$$2 \cdot 2000000\text{cm}^2 \cdot \frac{8}{\text{cm}^2} = 32000000 = 32 \text{ Millionen}$$

Aufgabe OS2:

Bei einem Quadrat $\square ABCD$ mit Seitenlänge 1 wird

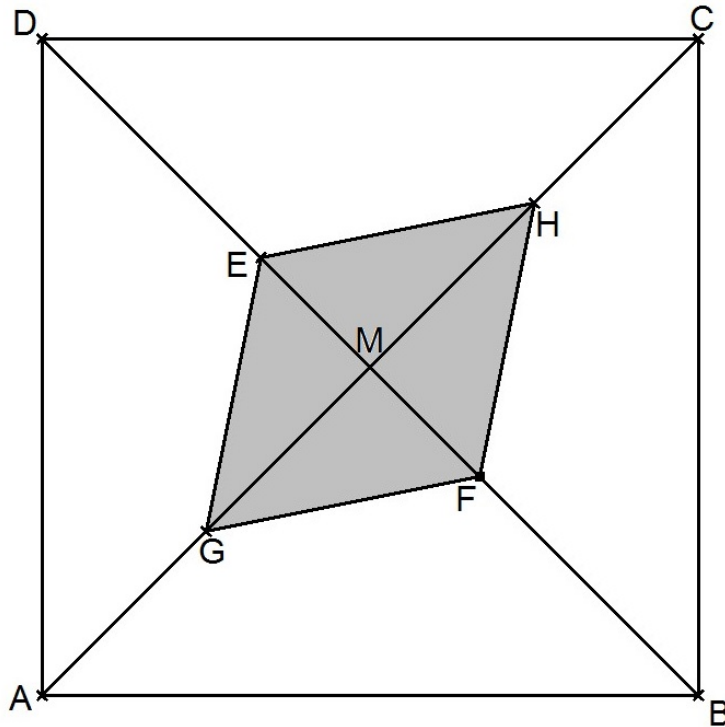
- eine Diagonale durch die Punkte E und F in 3 gleich lange Strecken geteilt,
- die andere Diagonale durch die Punkte G, M und H in 4 gleich lange Strecken geteilt (dabei ist M der Mittelpunkt des Quadrats).

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $\square EGFH$.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OS2:

$\square EGFH$ kann in die vier Dreiecke $\triangle MEG$, $\triangle MGF$, $\triangle MFH$, $\triangle MHE$ zerlegt werden.



Da sich die Diagonalen in einem Quadrat rechtwinklig schneiden, haben alle diese vier Dreiecke einen rechten Winkel bei M . Also:

$$\begin{aligned} F(\square EGFH) &= F(\triangle MEG) + F(\triangle MGF) + F(\triangle MFH) + F(\triangle MHE) \\ &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{ME}| \cdot |\overline{MG}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{MG}| \cdot |\overline{MF}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{MF}| \cdot |\overline{MH}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{MH}| \cdot |\overline{ME}| \end{aligned}$$

Sei d die Diagonalenlänge von $\square ABCD$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\overline{ME}| &= |\overline{MD}| - |\overline{ED}| = \frac{d}{2} - \frac{d}{3} = \frac{d}{6} \\ |\overline{MF}| &= |\overline{MB}| - |\overline{BF}| = \frac{d}{2} - \frac{d}{3} = \frac{d}{6} \\ |\overline{MG}| &= \frac{d}{4} \\ |\overline{MH}| &= \frac{d}{4} \end{aligned}$$

Setzt man dies oben ein, so folgt: $F(\square EGFH) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{4} \cdot \frac{d}{6} = \frac{d^2}{12}$

Nach dem Satz des Pythagoras ist $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

$$\text{Also: } F(\square EGFH) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Aufgabe OS3:

Bei einem Radrennen hat Arne einen Vorsprung vor Bert.

Ein Streckenposten am Punkt X notiert, dass Bert genau 1 Minute später als Arne vorbeikommt.

Beide fahren ab dem Punkt X zunächst mit der konstanten Geschwindigkeit von 30km/h weiter.

Ab einem gewissen Zeitpunkt T setzt plötzlich starker Gegenwind ein und beide fahren ab dem Zeitpunkt T bis zum Ziel nur noch mit der Geschwindigkeit von 25km/h.

Mit welchem Zeit Vorsprung kommt Arne vor Bert ins Ziel?

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OS3:

In einer Minute legen beide bei einer Geschwindigkeit von 30km/h die Strecke

$$30\text{km/h} \cdot \frac{1}{60}\text{h} = 0.5\text{km}$$

zurück. Arne hat also einen Vorsprung von 0.5km auf Bert.

Dieser Abstand von 0.5km ändert sich nicht bis Arne im Ziel ist, da beide zu jedem Zeitpunkt mit der gleichen Geschwindigkeit unterwegs sind.

Nachdem Arne im Ziel ist, braucht Bert noch

$$\frac{0.5\text{km}}{25\text{km/h}} = 0.02\text{h} = 0.02 \cdot 60\text{min} = 1.2\text{min} = 1\text{min} + 12\text{s}$$

bis zum Ziel.

Arne hat im Ziel also einen Vorsprung von 1 Minute und 12 Sekunden.

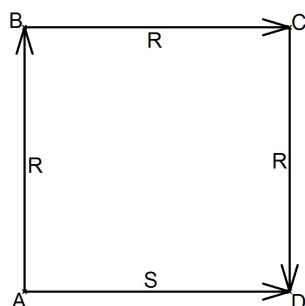
TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OS4:

Gegeben sei ein Quadrat $\square ABCD$ mit Seitenlänge 1m .

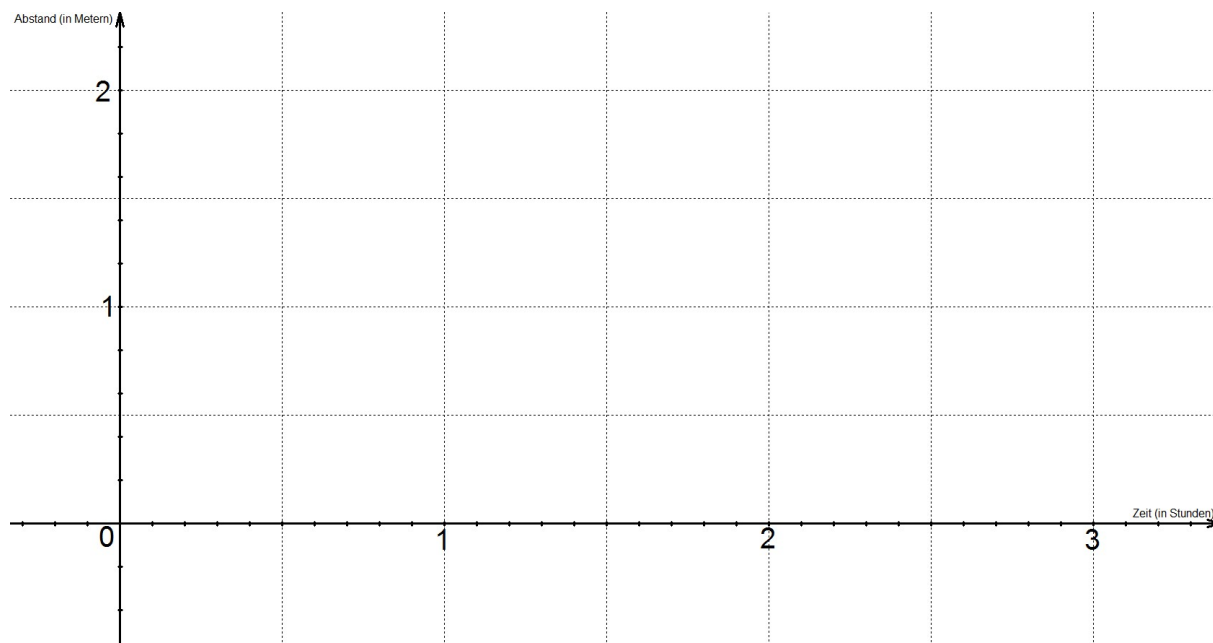
Im Punkt A befinden sich die Schnecke Siggie und die Rennschnecke Rudi.

Beide kriechen zum selben Zeitpunkt los, wobei sich Siggie auf gerader Strecke von A nach D und Rudi von A über B und C nach D bewegt.

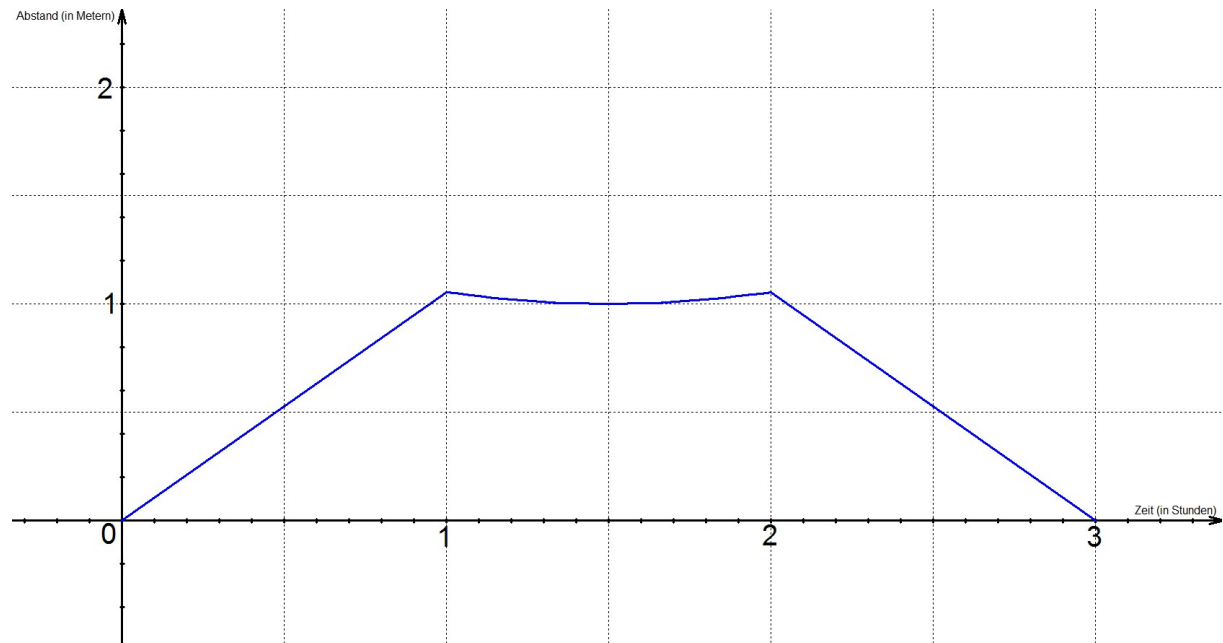


Beide bewegen sich jeweils mit gleichbleibender Geschwindigkeit und treffen nach 3 Stunden genau gleichzeitig im Punkt D ein.

Skizzieren Sie in das folgende Koordinatensystem den Abstand zueinander der beiden Schnecken in Abhängigkeit von der Zeit.



Dabei sollte die Größenordnung der Funktionswerte stimmig sein, außerdem sollten Eigenschaften wie Monotonieverhalten, Krümmung und Symmetrie erkennbar sein.



TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OS5:

Ein Dreieck $\triangle ABC$ hat bei C einen rechten Winkel. Es gilt $|\overline{AB}| = 5\text{cm}$ und $|\overline{BC}| = 3\text{cm}$.

Nun werden die Punkte

$$D \text{ auf } \overline{CA} \quad , \quad E \text{ auf } \overline{AB} \quad , \quad F \text{ auf } \overline{BC}$$

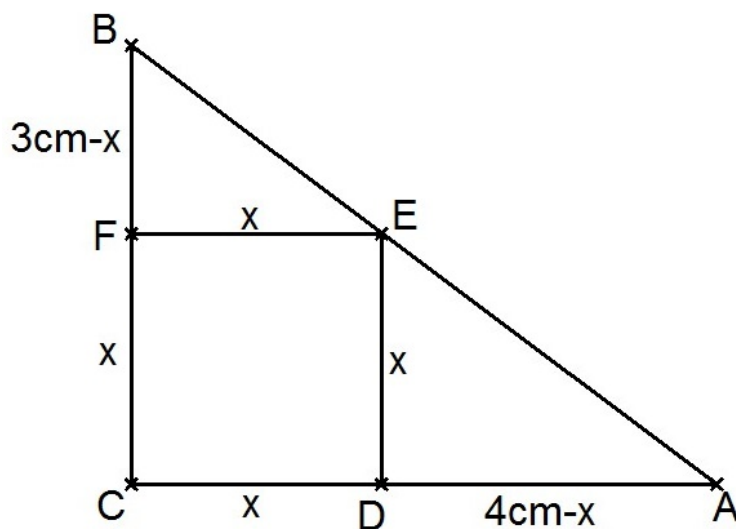
so gewählt, dass $\square CDEF$ ein Quadrat ist. Bestimmen Sie die Seitenlänge dieses Quadrats.

Lösung OS5:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 - |\overline{BC}|^2 = (5\text{cm})^2 - (3\text{cm})^2 = 25\text{cm}^2 - 9\text{cm}^2 = 16\text{cm}^2 \Rightarrow |\overline{AC}| = 4\text{cm}$$

Sei x nun die gesuchte Seitenlänge von $\square CDEF$. Dann ergeben sich die folgenden Streckenlängen:



Die Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle EFB$ sind ähnlich zueinander, denn sie haben einen gemeinsamen Winkel bei A und jeweils einen rechten Winkel bei D bzw. F . (Dreieck $\triangle ABC$ ist ebenfalls ähnlich zu diesen beiden Dreiecken.)

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DE}|} &= \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{FB}|} \Rightarrow \frac{4\text{cm} - x}{x} = \frac{x}{3\text{cm} - x} \\ &\Rightarrow (3\text{cm} - x) \cdot (4\text{cm} - x) = x^2 \\ &\Rightarrow 12\text{cm}^2 - 7\text{cm} \cdot x + x^2 = x^2 \\ &\Rightarrow 12\text{cm}^2 = 7\text{cm} \cdot x \\ &\Rightarrow x = \frac{12}{7}\text{cm} \end{aligned}$$

Aufgabe OS6:

Gegeben sei eine unbekannte Zahl $b > 0$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 - bx + 27$$

hat zwei Nullstellen, deren Abstand 3 beträgt. Bestimmen Sie die Zahl b .

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OS6:

Sei x_1 die kleinere und $x_1 + 3$ die größere der beiden Nullstellen von f . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{einerseits: } f(x) &= 4x^2 - bx + 27 &= 4 \cdot \left(x^2 - \frac{b}{4} \cdot x + \frac{27}{4}\right) \\ \text{andererseits: } f(x) &= 4 \cdot (x - x_1) \cdot (x - (x_1 + 3)) &= 4 \cdot (x^2 - (2x_1 + 3) \cdot x + x_1(x_1 + 3)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\underbrace{2x_1 + 3 = \frac{b}{4}}_{(1)} \quad \text{und} \quad \underbrace{x_1(x_1 + 3) = \frac{27}{4}}_{(2)}$$

Aus Gleichung (2) bestimmen wir nun x_1 :

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Leftrightarrow x_1^2 + 3x_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x_1 + \frac{3}{2} = 3 \quad \underline{\text{oder}} \quad x_1 + \frac{3}{2} = -3 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2} \quad \underline{\text{oder}} \quad x_1 = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Für $x_1 = \frac{3}{2}$ ergibt sich aus Gleichung (1): $b = 4 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{2} + 3\right) = 24$

Für $x_1 = -\frac{9}{2}$ ergibt sich aus Gleichung (1): $b = 4 \cdot \left(2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) + 3\right) = -24$

Wegen $b > 0$ muss $b = 24$ gelten.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Aufgabe OS7:

Wir betrachten die Zahlen $n_1, \dots, n_9$ die wie folgt definiert sind:

- $n_1 = 11 \dots 11$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Einsen besteht)
- $n_2 = 22 \dots 22$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Zweien besteht)
- $n_3 = 33 \dots 33$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Dreien besteht)
- $n_4 = 44 \dots 44$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Vieren besteht)
- $n_5 = 55 \dots 55$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Fünfen besteht)
- $n_6 = 66 \dots 66$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Sechsen besteht)
- $n_7 = 77 \dots 77$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Siebenen besteht)
- $n_8 = 88 \dots 88$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Achten besteht)
- $n_9 = 99 \dots 99$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2018 Neunen besteht)

Sei nun $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$ die Summe dieser neun Zahlen.

Bestimmen Sie die Quersumme von n .

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OS7:

Es gilt: $n_2 = 2 \cdot n_1$, $n_3 = 3 \cdot n_1$, $\dots$, $n_9 = 9 \cdot n_1$

Daraus folgt:

$$n = n_1 + 2 \cdot n_1 + 3 \cdot n_1 + \dots + 9 \cdot n_1 = (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \cdot n_1 = 45 \cdot n_1$$

Wir berechnen nun $n = 45 \cdot n_1$ mittels schriftlicher Multiplikation:

$$\begin{array}{r}
 45 \cdot \quad 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \\
 \hline
 \quad \quad 5 \ 5 \ \dots \ 5 \ 5 \\
 \quad \quad 4 \ 4 \ 4 \ \dots \ 4 \ 0 \\
 \hline
 \quad \quad 4 \ 9 \ 9 \ \dots \ 9 \ 5
 \end{array}$$

Damit gilt: $n = 4 \underbrace{99 \dots 99}_{2017 \text{ Neunen}} 5$

Folglich ist die Quersumme von n gegeben durch:

$$Q(n) = 4 + 2017 \cdot 9 + 5 = 2018 \cdot 9 = 18162$$

Aufgabe OS8:

Ein Viereck wird durch die sich senkrecht schneidenden Diagonalen in vier Dreiecke unterteilt, von denen drei die folgenden Flächeninhalte haben:

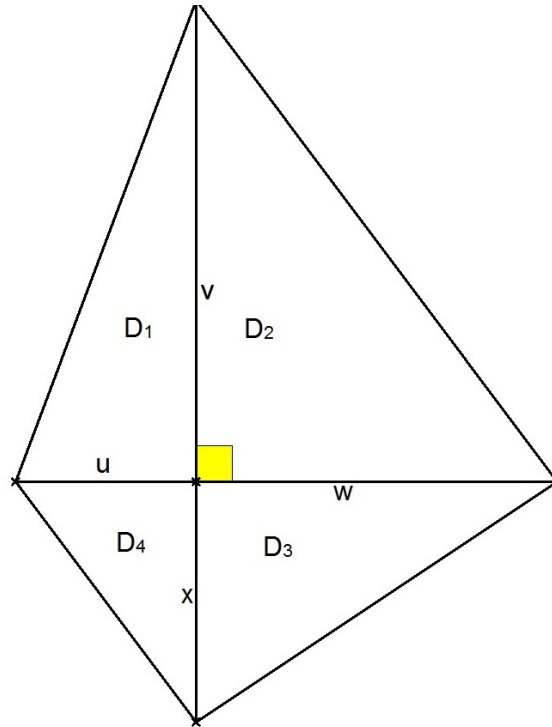
$$6\text{cm}^2 \quad , \quad 10\text{cm}^2 \quad , \quad 12\text{cm}^2$$

Welchen Flächeninhalt kann das vierte Dreieck haben? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

TAG DER MATHEMATIK 2018

Lösung OS8:

Wir bezeichnen die Längen der Strecken vom Diagonalschnittpunkt zu jeweils einem der Eckpunkte des Dreiecks mit u, v, w, x und die vier Teildreiecke mit D_1, D_2, D_3, D_4 (siehe Grafik):



Es gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{1}{2} \cdot u \cdot v \\ D_2 = \frac{1}{2} \cdot v \cdot w \\ D_3 = \frac{1}{2} \cdot w \cdot x \\ D_4 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot u \end{array} \right\} \Rightarrow D_1 \cdot D_3 = \frac{1}{4} \cdot u \cdot v \cdot w \cdot x = D_2 \cdot D_4 \Rightarrow D_4 = \frac{D_1 \cdot D_3}{D_2}$$

Also:

- Falls $D_2 = 6\text{cm}^2$ und $\{D_1, D_3\} = \{10\text{cm}^2, 12\text{cm}^2\}$ ergibt sich: $D_4 = \frac{10\text{cm}^2 \cdot 12\text{cm}^2}{6\text{cm}^2} = 20\text{cm}^2$
- Falls $D_2 = 10\text{cm}^2$ und $\{D_1, D_3\} = \{6\text{cm}^2, 12\text{cm}^2\}$ ergibt sich: $D_4 = \frac{6\text{cm}^2 \cdot 12\text{cm}^2}{10\text{cm}^2} = 7.2\text{cm}^2$
- Falls $D_2 = 12\text{cm}^2$ und $\{D_1, D_3\} = \{6\text{cm}^2, 10\text{cm}^2\}$ ergibt sich: $D_4 = \frac{6\text{cm}^2 \cdot 10\text{cm}^2}{12\text{cm}^2} = 5\text{cm}^2$

Das vierte Dreieck kann also den Flächeninhalt 20cm^2 oder 7.2cm^2 oder 5cm^2 haben.