Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

mit Lösungen

Einzelwettbewerb	Aufgaben ME1, ME2, ME3
Gruppenwettbewerb	Aufgaben MG1, MG2, MG3, MG4
Speedwettbewerb	Aufgaben MS1, MS2, MS3, MS4, MS5, MS6, MS7, MS8

Aufgabe ME1:

Aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a sollen die Ecken herausgeschnitten werden, so dass ein regelmäßiges Sechseck ensteht.

(a) Bestimme die Kantenlänge des Sechsechs (in Abhängigkeit von a).

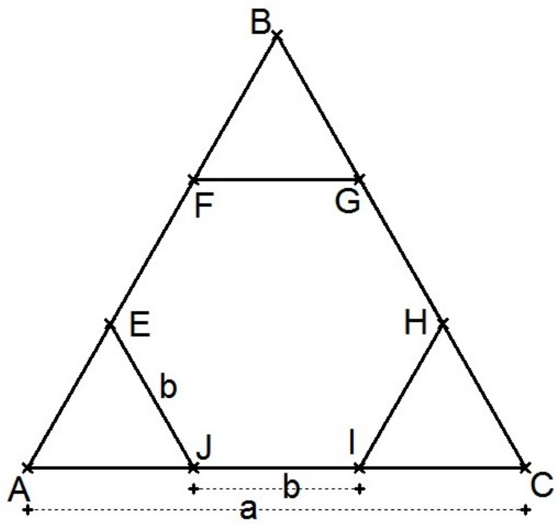
(b) Bestimme die Länge der Strecke zwischen zwei gegenüberliegenden Eckpunkten des Sechsecks (in Abhängigkeit von a).

(c) Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks und des Dreiecks.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Seitenlänge des Dreiecks sei a, die des Sechsecks sei b.

Wir bezeichnen außerdem die Ecken des Dreicks mit A, B und C und die Ecken des Sechsecks mit E, F (auf der Strecke $\overline{AB}$), G, H (auf der Strecke $\overline{BC}$) und I, J (auf der Strecke $\overline{CA}$).



Das Dreieck $\triangle JAE$ ist gleichseitig, denn es hat einen 60°-Winkel bei A und die Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{JA}$ sind aus Symmetriegründen gleich lang.

Folglich gilt: $\quad |\overline{JA}| = |\overline{EJ}| = b$

Aus Symmetriegründen gilt dann auch $|\overline{CI}| = b$ und anhand der Strecke $\overline{CA}$ erkennt man nun:

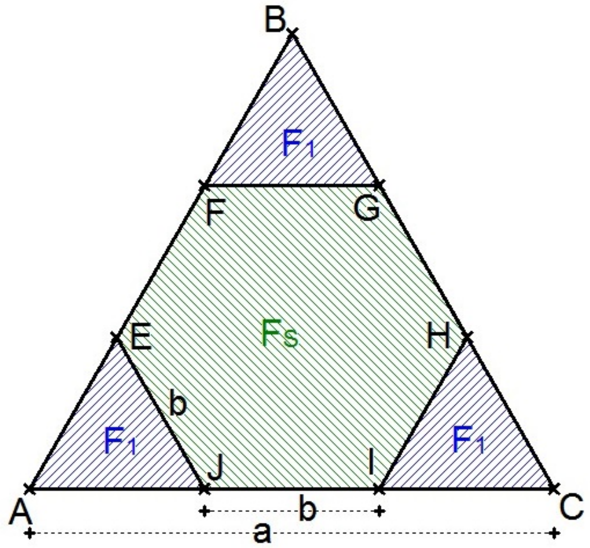
$$a = |\overline{CA}| = |\overline{CI}| + |\overline{IJ}| + |\overline{JA}| = b + b + b = 3b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{3}$$

(b) Gesucht ist die Länge der Strecke $\overline{EH}$. Da $\triangle EBH$ gleichseitig ist (aus Symmetriegründen ist es gleichschenklig und es hat einen 60°-Winkel bei B) folgt:

$$|\overline{EH}| = |\overline{EB}| = |\overline{EF}| + |\overline{FB}| \overset{\text{nach Teil (a)}}{=} \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$$

(c) Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks mit F_D und den Flächeninhalt des Sechsecks mit F_S.

Außerdem sei F_1 der Flächeninhalt eines der kleinen Dreiecke $\triangle JAE$, $\triangle FBG$, $\triangle HCI$.



Da diese kleinen Dreiecke ähnlich zu dem großen Dreieck $\triangle ABC$ sind (es sind alles gleichseitige Dreiecke), ihre Seitenlängen aber nur $\frac{1}{3}$-mal so groß sind, wie die des großen Dreiecks, gilt für die Flächeninhalte:

$$F_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot F_D = \frac{1}{9} \cdot F_D$$

Folglich ist:

$$F_S = F_D - 3 \cdot F_1 = F_D - \frac{3}{9} \cdot F_D = \frac{2}{3} \cdot F_D \quad \Rightarrow \quad \frac{F_S}{F_D} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe ME2:

(a) Ein Bauer hat einen bestimmten Vorrat an Heu. Er überlegt:

- Für eine Kuh reicht der Vorrat genau 72 Tage.
- Für ein Pferd reicht der Vorrat genau 90 Tage.

Wie lange reicht der Vorrat für eine Kuh und ein Pferd zusammen?

(b) Hätte der Bauer eine Kuh, ein Pferd und 5 Ziegen, so würde der Vorrat genau 24 Tage reichen.

Wie lange reicht der Vorrat für eine Ziege.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei M die vorhandene Menge an Heu. Dann frisst eine Kuh pro Tag $\frac{M}{72}$ und ein Pferd $\frac{M}{90}$ Heu.

Zusammen fressen Kuh und Pferd also täglich:

$$\frac{M}{72} + \frac{M}{90} = \left(\frac{10}{720} + \frac{8}{720}\right) \cdot M = \frac{18}{720} \cdot M = \frac{M}{40}$$

Der Vorrat reicht also genau 40 Tage für Kuh und Pferd zusammen.

(b) Sei x die Menge, die eine Ziege täglich frisst. Dann gilt:

$$\underbrace{\frac{M}{72} + \frac{M}{90}}_{\overset{(a)}{=} \frac{M}{40}} + 5x = \frac{M}{24} \quad \Rightarrow \quad 5x = \frac{M}{24} - \frac{M}{40} = \frac{5M - 3M}{120} = \frac{M}{60} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{M}{300}$$

Der Vorrat reicht für eine Ziege also 300 Tage.

Aufgabe ME3:

Sei $A = 999\ldots999$ die Zahl die aus 2015 Neunen besteht.

(a) Bestimme die Quersumme der Zahl $2 \cdot A$.

(b) Bestimme die Quersumme der Zahl A^2.

Anmerkung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe der Ziffern dieser Zahl.

Lösungsvorschlag:

Es ist $A = 10^{2015} - 1$. Daher ist:

(a) $2 \cdot A = 2 \cdot 10^{2015} - 2 = 1\,\underbrace{999\ldots999}_{2014\text{ Neunen}}\,8$. Daher ist die Quersumme von $2 \cdot A$:

$$1 + 2014 \cdot 9 + 8 = 18135$$

(b)

$$A^2 = \left(10^{2015} - 1\right)^2 = \left(10^{2015}\right)^2 - 2 \cdot 10^{2015} \cdot 1 + 1^2 = 10^{4030} - 2 \cdot 10^{2015} + 1 = 10^{2015} \cdot \left(10^{2015} - 2\right) + 1$$

$$10^{2015} - 2 = \underbrace{999\ldots999}_{2014\text{ Neunen}}\,8 \quad \Rightarrow \quad 10^{4030} - 2 \cdot 10^{2015} = \underbrace{999\ldots999}_{2014\text{ Neunen}}\,8\,\underbrace{000\ldots000}_{2015\text{ Nullen}}$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = 10^{2015} \cdot \left(10^{2015} - 2\right) + 1 = \underbrace{999\ldots999}_{2014\text{ Neunen}}\,8\,\underbrace{000\ldots000}_{2014\text{ Nullen}}\,1$$

Somit ist die Quersumme von A^2:

$$2014 \cdot 9 + 8 + 2014 \cdot 0 + 1 = 18135$$

Aufgabe MG1:

Beim zweiten Heimspiel einer Fußballmannschaft in einer Saison kamen nur noch halb so viele Zuschauer wie beim ersten Spiel. Dadurch verzehnfachte sich die Zahl der freien Plätze im Stadion.

Beim dritten Heimspiel kamen wieder 1000 Zuschauer mehr als beim zweiten Spiel. Dadurch war das Stadion beim dritten Heimspiel genau zur Hälfte gefüllt.

Wieviele Plätze gibt es im Stadion ?

Lösungsvorschlag:

Sei a die Zahl der Plätze im Stadion und x die Zahl der Zuschauer beim ersten Spiel. Beim ersten Spiel blieben also $a - x$ Plätze frei.

Für das zweite Spiel gilt:

- Es kamen $\frac{1}{2} \cdot x$ Zuschauer.
- Es blieben $10 \cdot (a - x)$ Plätze frei.

Folglich muss gelten:

$$\frac{1}{2} \cdot x + 10 \cdot (a - x) = a \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{19}{2} \cdot x = -9 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{18}{19} \cdot a \text{ (I)}$$

Für das dritte Spiel gilt:

- Es kamen $\frac{1}{2} \cdot x + 1000$ Zuschauer.
- Es kamen $\frac{a}{2}$ Zuschauer.

Folglich muss gelten:

$$\frac{1}{2} \cdot x + 1000 = \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2000 = a \text{ (II)}$$

Setzt man (I) in (II) ein, so folgt:

$$\frac{18}{19} \cdot a + 2000 = a \quad \Leftrightarrow \quad 2000 = \frac{1}{19} \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a = 38000$$

Also gibt es 38000 Plätze im Stadion.

Beim ersten Spiel kamen 36000 Zuschauer (2000 freie Plätze). Beim zweiten Spiel kamen 18000 Zuschauer (20000 freie Plätze). Beim dritten Spiel kamen 19000 Zuschauer (genau die Hälfte der Plätze).

Aufgabe MG2:

Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$. Der Punkt P wird im Inneren des Fünfecks so gewählt, dass $\triangle ABP$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Nun wird der Punkt P mit allen Eckpunkten des Fünfecks verbunden, dadurch wird das Fünfeck in 5 Dreiecke aufgeteilt.

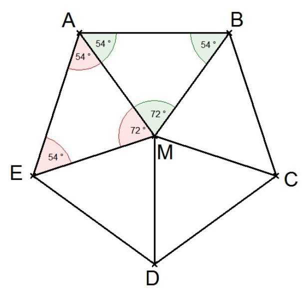
Fertigt eine Skizze an. Bestimmt nun alle Innenwinkel in den 5 Dreiecken, in die das Fünfeck aufgeteilt wurde. (Es genügt, wenn die gesuchten Winkelmaße in die Skizze eingetragen werden.)

Tipp: Es ist sinnvoll, sich zuerst zu überlegen, wie groß die Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck sind.

Lösungsvorschlag:

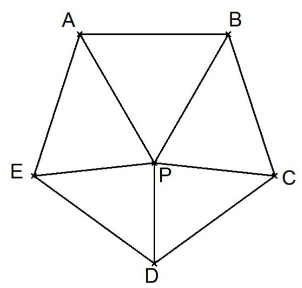
1.) Vorab überlegen wir uns, wie groß ein Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck ist.

Dazu betrachten wir den Mittelpunkt M des Fünfecks und verbinden ihn mit allen Eckpunkten. Dabei entstehen 5 Dreicke, die bei M jeweils einen Winkel von $\frac{360°}{5} = 72°$ haben. Da es sich um gleichschenklige Dreiecke handelt, haben jeweils ihre beiden anderen Winkel das Maß $\frac{180°-72°}{2} = 54°$.



Ein Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck setzt sich also aus 2 Winkeln zu je 54° zusammen und hat folglich das Maß: $2 \cdot 54° = 108°$

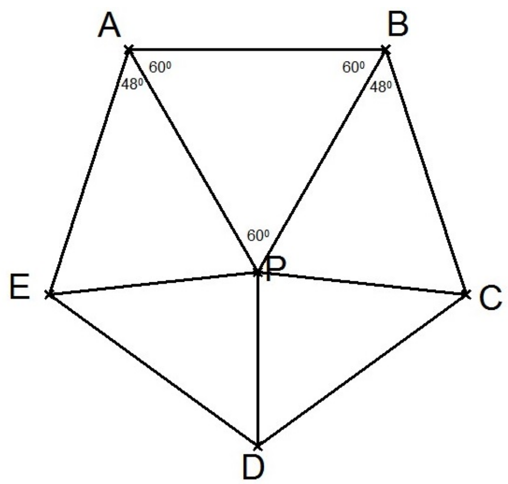
2.) Nun betrachten wir den Punkt P im Inneren des Fünfecks, so dass $\triangle ABP$ ein gleichseitiges Dreieck ist.



Die Innenwinkel in diesem Dreieck $\triangle ABP$ (also $\angle PAB$, $\angle ABP$ und $\angle BPA$) müssen alle das Maß 60° haben. Daraus ergibt sich

$$\angle PAE = \underbrace{\angle BAE}_{\text{Innenwinkel im Fünfeck}} - \angle BAM = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$$

und analog: $\angle CBM = 48^\circ$



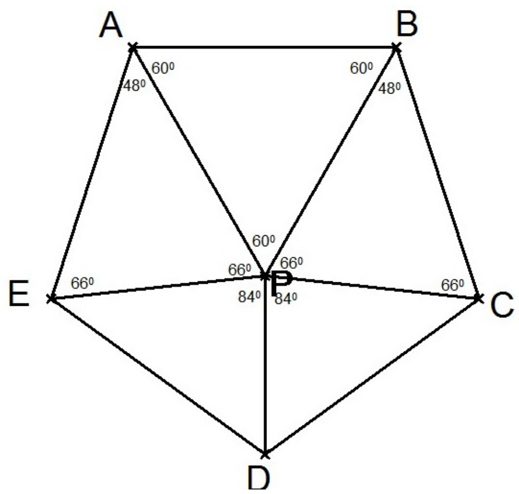
Nun betrachten wir $\triangle EAP$. Dieses ist gleichschenklig und folglich gilt:

$$\angle APE = \angle PEA = \frac{180^\circ - \angle EAP}{2} = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$$

Analog ist auch: $\angle BCP = \angle CPB = 66^\circ$

Die beiden Winkel $\angle CPD$ und $\angle DPE$ sind aus Symmetriegründen gleich groß und addieren sich mit den drei schon bekannten Winkeln $\angle APE = 66^\circ$, $\angle BPA = 60^\circ$ und $\angle CPB = 66^\circ$ zu 360°.

$$\text{Also:} \quad \angle CPD = \angle DPE = \frac{360^\circ - 66^\circ - 60^\circ - 66^\circ}{2} = 84^\circ$$



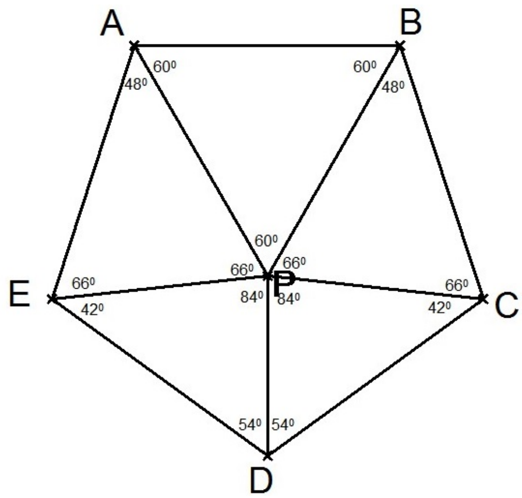
Weiterhin ist

$$\measuredangle PED = \underbrace{\measuredangle DEA}_{\text{Innenwinkel im Fünfeck}} - \measuredangle PEA = 108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$$

und (aufgrund der Innenwinkelsumme im $\triangle DEP$):

$$\measuredangle EDP = 180^\circ - \measuredangle PED - \measuredangle DPE = 180^\circ - 42^\circ - 84^\circ = 54^\circ$$

Analog ist: $\measuredangle PCD = 42^\circ$ und $\measuredangle CDP = 54^\circ$



Aufgabe MG3:

(a) Wieviele verschiedene fünfstellige Zahlen kann man aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5$ bilden, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen darf?

(b) Wieviele dieser Zahlen sind durch 9 teilbar?

Alle Antworten sind zu begründen.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt:

Für die erste Ziffer gibt es	5	Möglichkeiten.	(Die 0 ist als erste Ziffer nicht möglich.)
Für die zweite Ziffer gibt es dann	5	Möglichkeiten.	
Für die dritte Ziffer gibt es dann	4	Möglichkeiten.	
Für die vierte Ziffer gibt es dann	3	Möglichkeiten.	
Für die fünfte Ziffer gibt es dann	2	Möglichkeiten.	

Also gibt es insgesamt

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$$

fünfstellige Zahlen, die man aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5$ bilden kann, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen darf.

(b) Die Quersumme einer solchen Zahl ist

$$\begin{aligned} \text{mindestens:} \quad 4+3+2+1+0 &= 10 \\ \text{höchstens:} \quad 5+4+3+2+1 &= 15 \end{aligned}$$

Somit ist die Quersumme der Zahl nicht durch 9 teilbar (denn keine der Zahlen zwischen 10 und 15 ist durch 9 teilbar).

Folglich ist die Zahl selbst auch nicht durch 9 teilbar.

Antwort: Keine der Zahlen ist durch 9 teilbar.

Aufgabe MG4:

Eine Jahresuhr zeigt jeweils zweistellig Monat, Tag, Stunde, Minute und Sekunde an:

0	3		2	4		1	1		1	5		0	0
Monat			Tag			Stunden			Minuten			Sekunden	

Wann werden im Verlauf eines Jahres zum ersten Mal zehn verschiedene Ziffern angezeigt?

Lösungsvorschlag:

Man beginnt am besten von hinten und stellt möglichst große Ziffern an das Ende:

- $\boxed{\text{Sekunden:}}$ Die zweite Ziffer ist eine 9 und die erste Ziffer ist eine 5 (eine größere Ziffer ist hier nicht möglich).
  Verbleibende Ziffern: $0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$
- $\boxed{\text{Minuten:}}$ Die zweite Ziffer ist eine 8 und die erste Ziffer ist eine 4 (eine größere der noch verfügbaren Ziffer ist hier nicht möglich).
  Verbleibende Ziffern: $0, 1, 2, 3, 6, 7$
- $\boxed{\text{Stunden:}}$ Es kommen zwei Möglichkeiten in Frage: 17 oder 23

<u>1.Fall:</u> Stundenanzeige: 17
Verbleibende Ziffern: $0, 2, 3, 6$

- $\boxed{\text{Tage:}}$ Die zweite Ziffer ist eine 6 und die erste Ziffer ist eine 2 (eine größere der noch verfügbaren Ziffer ist hier nicht möglich).
  Verbleibende Ziffern: $0, 3$
- $\boxed{\text{Monate:}}$ Die zweite Ziffer ist eine 3 und die erste Ziffer ist eine 0.

Hier ergibt sich also:

0	3		2	6		1	7		4	8		5	9
Monat			Tag			Stunden			Minuten			Sekunden	

<u>2.Fall:</u> Stundenanzeige: 23
Verbleibende Ziffern: $0, 1, 6, 7$

- $\boxed{\text{Tage:}}$ Die zweite Ziffer ist eine 7 und die erste Ziffer ist eine 1 (eine größere der noch verfügbaren Ziffer ist hier nicht möglich).
  Verbleibende Ziffern: $0, 6$
- $\boxed{\text{Monate:}}$ Die zweite Ziffer ist eine 6 und die erste Ziffer ist eine 0.

Hier ergibt sich also:

0	6		1	7		2	3		4	8		5	9
Monat			Tag			Stunden			Minuten			Sekunden	

Beim ersten Fall ergibt sich ein früherer Zeitpunkt als beim zweiten Fall. Die Lösung ist also:

0	3		2	6		1	7		4	8		5	9
Monat			Tag			Stunden			Minuten			Sekunden	

Aufgabe MS1:

Eine große Tafel Schokolade kostet 60% mehr als eine kleine.

Wieviel Prozent kostet eine kleine Tafel weniger als eine große?

Lösungsvorschlag:

Ist x der Preis der großen Tafel und y der Preis der kleinen, so gilt:

$$x = \left(1 + \frac{60}{100}\right) \cdot y = \frac{8}{5} \cdot y \quad \text{und folglich} \quad y = \frac{5}{8} \cdot x = \left(1 - \frac{37,5}{100}\right) \cdot x$$

Eine kleine Tafel kostet also $37,5\%$ weniger als eine große.

Aufgabe MS2:

Die Seiten eines Buches werden fortlaufend durchnumeriert (beginnend mit Seite 1). Die Seitenzahlen haben zusammen 999 Ziffern.

Wieviele Seiten hat das Buch?

Lösungsvorschlag:

Es gibt 9 einstellige Zahlen, diese haben insgesamt $9 \cdot 1 = 9$ Ziffern.

Es gibt 90 zweistellige Zahlen, diese haben insgesamt $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern.

Die dreistelligen Seitenzahlen des Buches müssen also zusammen $999 - 180 - 9 = 810$ Ziffern haben.

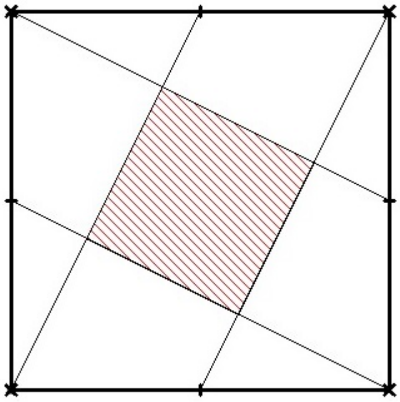
Das Buch hat somit $810 : 3 = 270$ dreistellige Seitenzahlen.

Da die erste dreistellige Seitenzahl die 100 ist, hat die letzte Seite des Buches die Seitenzahl $270 + 100 - 1 = 369$.

Das Buch hat also 369 Seiten.

Aufgabe MS3:

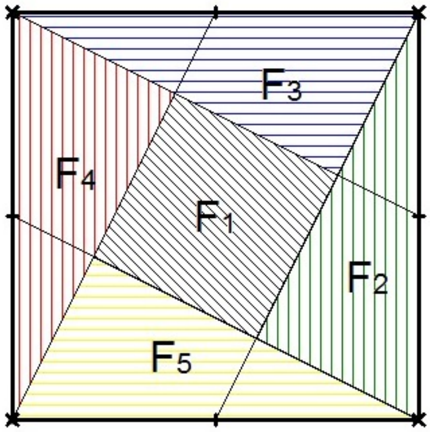
In einem Quadrat $\square ABCD$ werden die Seitenmittelpunkte wie abgebildet mit jeweils einer gegenüberliegenden Ecke verbunden:



Bestimmt den Anteil der schraffierten Fläche an der Gesamtfläche von $\square ABCD$.

Lösungsvorschlag:

Wir zerlegen das Quadrat $\square ABCD$ wie abgebildet in 5 Teilfächen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5.



Die Flächen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 sind alle gleich groß.

Dies sieht man beispielsweise, indem man jeweils das kleine Teildreieck der Flächen F_2, F_3, F_4, F_5 "umklappt"(d.h. an den jeweiligen Seitenmittelpunkten spiegelt), damit werden diese Flächen zu je einem Quadrat das genauso groß wie F_1 ist. (Wir wollen dies hier nicht beweisen.)

Damit ist der Anteil der Fläche F_1 an der Gesamtfläche des Quadrats $\square ABCD$ genau $\frac{1}{5}$.

Aufgabe MS4:

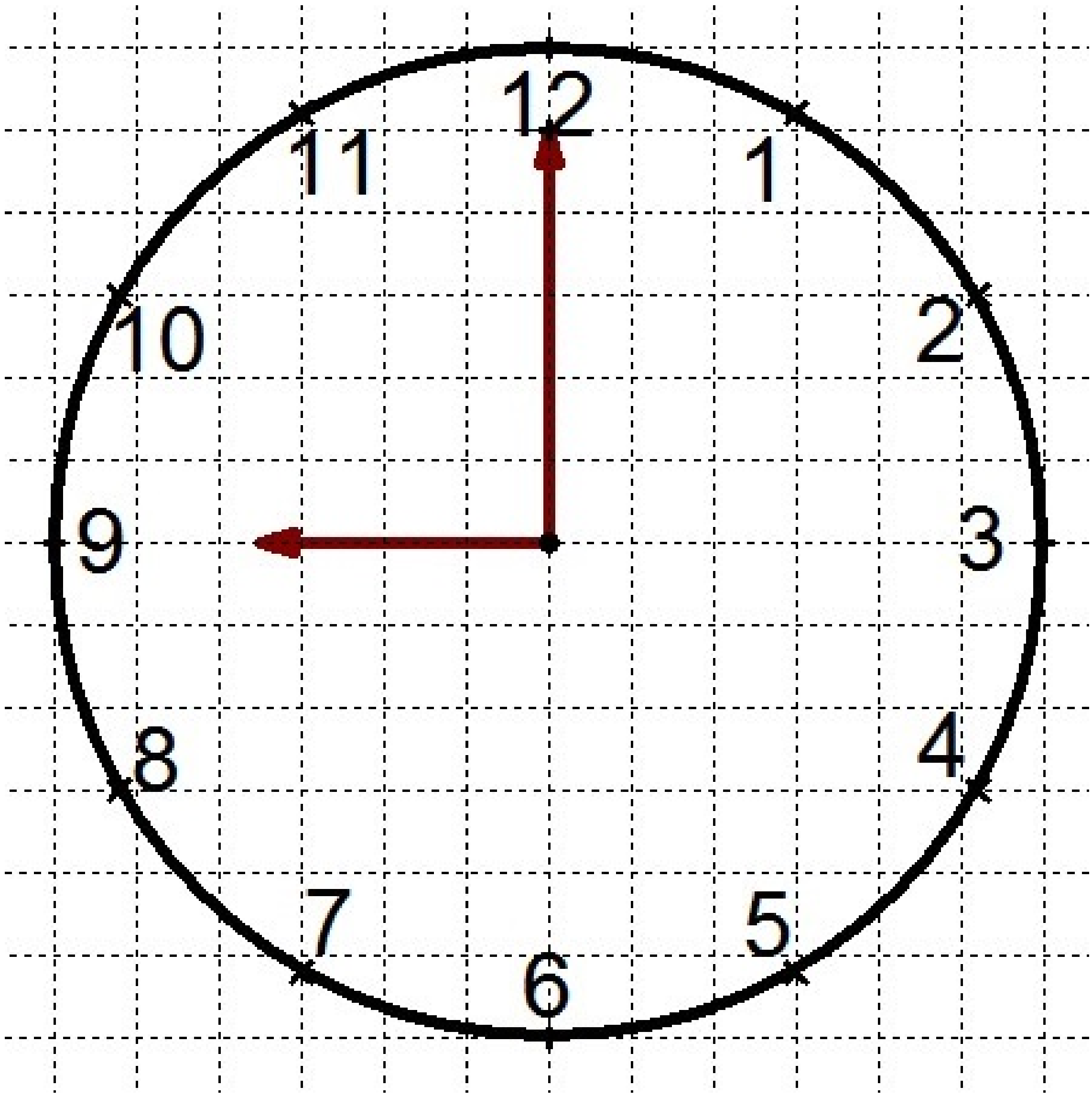
Eine Schnecke sitzt im Mittelpunkt einer Kirchturmuhr auf dem Minutenzeiger.

Um Punkt 9:00 Uhr beginnt sie mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Zeiger nach außen zu kriechen.

Um 10:30 macht sie eine Pause von 60 Minuten, dann kriecht sie weiter.

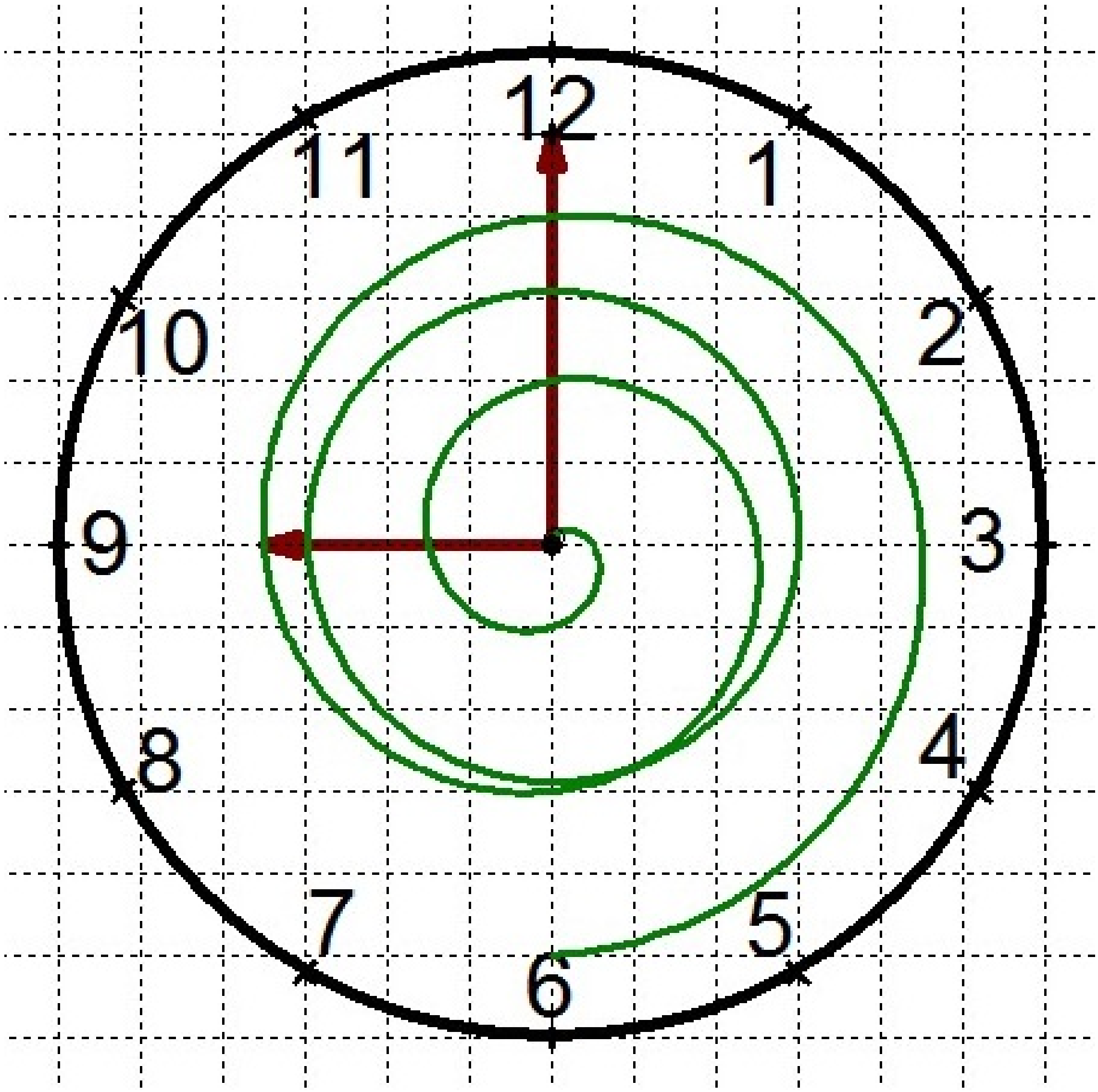
Sie erreicht die Spitze des Zeigers um 12:30 Uhr.

Skizziert den Weg der Schnecke auf dem Ziffernblatt.



Anmerkung: Die Skizze muss nicht exakt sein.

Lösungsvorschlag:



Aufgabe MS5:

Anna, Ben, Carlos, Daniela, Emil und Fabienne haben jeder eine gewissen Geldbetrag dabei.

Anna:	“Ohne mich hättet ihr alle zusammen genau 15 Euro.“
Ben:	“Ohne mich hättet ihr alle zusammen genau 16 Euro.“
Carlos:	“Ohne mich hättet ihr alle zusammen genau 17 Euro.“
Daniela:	“Ohne mich hättet ihr alle zusammen genau 18 Euro.“
Emil:	“Ohne mich hättet ihr alle zusammen genau 19 Euro.“
Fabienne:	“Ohne mich hättet ihr alle zusammen genau 20 Euro.“

Wieviel Geld haben alle zusammen?

Lösungsvorschlag:

Seien A, B, C, D, E, F die Geldbeträge der einzelnen Personen und G die Gesamtsumme. Dann gilt:

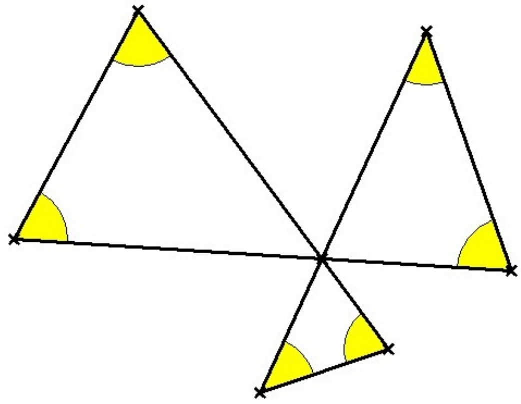
$$\begin{array}{ccccc} G & - & A & = & 15 \\ G & - & B & = & 16 \\ G & - & C & = & 17 \\ G & - & D & = & 18 \\ G & - & E & = & 19 \\ G & - & F & = & 20 \end{array}$$

Addiert man alle diese Gleichungen, so ergibt sich:

$$6 \cdot G - \underbrace{A + B + C + D + E + F}_{=G} = \underbrace{15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20}_{=105} \quad \Leftrightarrow \quad 5G = 105 \quad \Leftrightarrow \quad G = 21$$

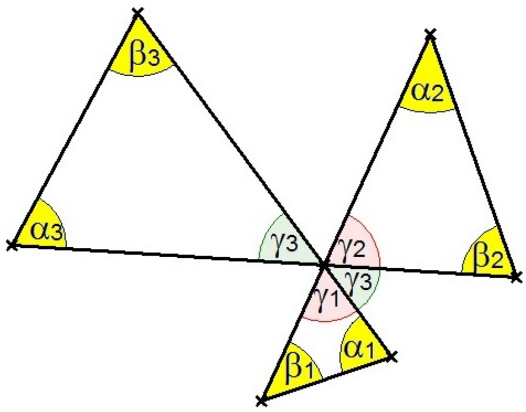
Zusammen haben alle also genau 21 Euro.

Aufgabe MS6:
Drei Strecken schneiden sich in einem Punkt. Die Enden der Strecken sind wie in der folgenden Abbildung paarweise miteinander verbunden:



Bestimmt die Summe der eingezeichneten Winkel.

Lösungsvorschlag:
Wir bezeichnen die Winkel in den Dreiecken wie in der folgenden Abbildung angegeben mit $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ $(j = 1, 2, 3)$:



Der Scheitelwinkel zu γ_3 wurde ebenfalls eingetragen.

$$\text{Man erkennt:} \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 180° \quad (*)$$

Da die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck 180° beträgt, folgt:

$$\underbrace{\alpha_1 + \beta_1}_{=180°-\gamma_1} + \underbrace{\alpha_2 + \beta_2}_{=180°-\gamma_2} + \underbrace{\alpha_3 + \beta_3}_{=180°-\gamma_3} = 3 \cdot 180° - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \overset{(*)}{=} 540° - 180° = 360°$$

Aufgabe MS7:

Ordnet die folgenden Zahlen nach der Größe:

$$32^1 \quad , \quad 16^2 \quad , \quad 8^4 \quad , \quad 4^8 \quad , \quad 2^{16} \quad , \quad 1^{32}$$

Achtung: Zwei der Zahlen sind gleich.

Lösungsvorschlag:

Es gilt:

$$\begin{array}{rcccl} 32^1 & & & = & 2^5 \\ 16^2 & = & \left(2^4\right)^2 & = & 2^8 \\ 8^4 & = & \left(2^3\right)^4 & = & 2^{12} \\ 4^8 & = & \left(2^2\right)^8 & = & 2^{16} \\ 2^{16} & & & = & 2^{16} \\ 1^{32} & = & \left(2^0\right)^{32} & = & 2^0 \end{array}$$

Also ist:

$$\boxed{\begin{array}{c} 1^{32} \\ \| \\ 2^0 \end{array}} < \boxed{\begin{array}{c} 32^1 \\ \| \\ 2^5 \end{array}} < \boxed{\begin{array}{c} 16^2 \\ \| \\ 2^8 \end{array}} < \boxed{\begin{array}{c} 8^4 \\ \| \\ 2^{12} \end{array}} < \boxed{\begin{array}{c} 4^8 \\ \| \\ 2^{16} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} 2^{16} \\ \| \\ 2^{16} \end{array}}$$

Aufgabe MS8:

Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h auf einer geraden Strecke. Parallel zu den Gleisen verläuft eine Straße.

Ein Auto, dass mit 80 km/h in die entgegengesetzte Richtung des Zuges fährt, benötigt eine Minute um von einem Ende des Zuges zum anderen Ende zu fahren.

Wie lange benötigt ein Auto, dass mit 80 km/h in die Richtung des Zuges fährt, um von einem Ende des Zuges zum anderen Ende zu fahren?

Lösungsvorschlag:

Ein Auto, dass in die entgegengesetzte Richtung des Zuges fährt, bewegt sich relativ zum Zug mit einer Geschwindigkeit von: $80\text{km/h} + 60\text{km/h} = 140\text{km/h}$

Ein Auto, dass in die Richtung des Zuges fährt, bewegt sich relativ zum Zug mit einer Geschwindigkeit von: $80\text{km/h} - 60\text{km/h} = 20\text{km/h}$

Relativ zum Zug, ist das in die entgegengesetzte Richtung fahrende Auto also 7-mal so schnell wie das Auto, das in dieselbe Richtung wie der Zug fährt.

Somit braucht das in die Richtung des Zuges fahrende Auto 7-mal so lang wie das in die entgegengesetzte Richtung fahrende, also genau 7 Minuten.