Aufgaben für die Klassenstufen 9/10

mit Lösungen

Aufgabe ME1: Auf einem Parkplatz stehen einige Autos, darunter sind einige Sportwagen. Ein Besucher stellt fest:

- Genau die Hälfte aller Autos auf dem Parkplatz ist rot.
- $\frac{1}{3}$ aller roten Autos sind Sportwagen.
- $\frac{5}{6}$ aller Sportwagen sind rot.

Welcher Anteil aller Autos sind Sportwagen?

Lösungsvorschlag:
Es bezeichne x den Anteil der Sportwagen unter allen Autos.

Man kann nun den Anteil y der roten Sportwagen unter allen Autos auf zwei Arten berechnen:

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \left(\frac{1}{3} \text{ von } \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{5}{6} \cdot x \quad \left(\frac{5}{6} \text{ von } x\right)$$

$$\text{Gleichsetzen} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\text{Lösung: } \tfrac{1}{5} \text{ aller Autos sind Sportwagen.}}$$

Aufgabe ME2: In einem geschlossenen Glasquader befinden sich $18cm^3$ Wasser. Legt man den Quader nacheinander auf eine andere seiner Flächen, so beträgt die Wasserhöhe einmal $1cm$ einmal $2cm$ und einmal $4cm$.
Welches Volumen hat der Quader?

Lösungsvorschlag:
Wir bezeichnen die Seitenlängen des Quaders mit a, b, c und sein Volumen mit V. Aus den gegebenen Informationen folgt:

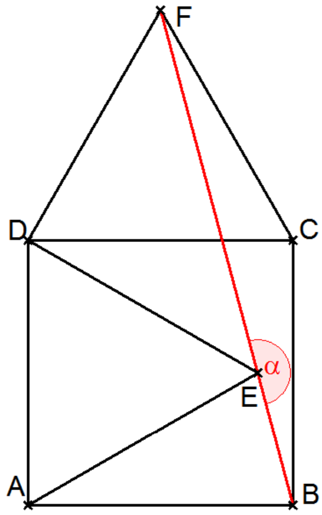
$$\begin{array}{ccccccc} a & \cdot & b & \cdot & 1\text{cm} & = & 18\text{cm}^3 \\ a & \cdot & 2\text{cm} & \cdot & c & = & 18\text{cm}^3 \\ 4\text{cm} & \cdot & b & \cdot & c & = & 18\text{cm}^3 \end{array}$$

Multipliziert man alle drei Gleichungen miteinander, so folgt:

$$\underbrace{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}_{=V^2} \cdot 1\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot 4\text{cm} = \left(18\text{cm}^3\right)^3 \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{18^3\ \text{cm}^9}{1 \cdot 2 \cdot 4\ \text{cm}^3} = 9^3\ \text{cm}^6 \quad \Rightarrow \quad V = 3^3\ \text{cm}^3 = 27\text{cm}^3$$

$\boxed{\text{Lösung: Der Quader hat ein Volumen von } 27\text{cm}^3.}$

Aufgabe ME3: $\square ABCD$ ist ein Quadrat. $\triangle AED$ und $\triangle DCF$ sind gleichseitig.

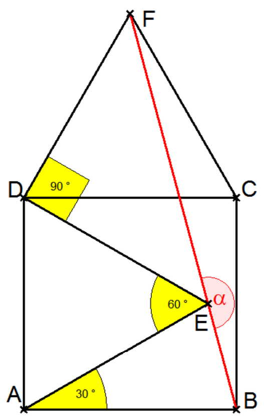


Begründe, dass der Winkel $\alpha = \measuredangle BEF$ ein 180°-Winkel ist.

Lösungsvorschlag:
Wir halten zunächst fest, dass alle Strecken in der Figur gleich lang sind. Es gilt:

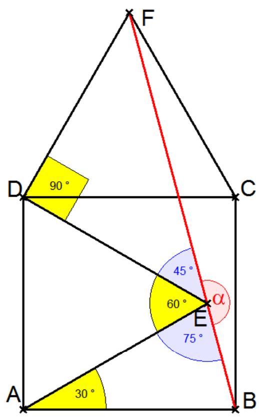
- $\measuredangle DEA = 60°$ (Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck)
- $\measuredangle BAE = \measuredangle BAD - \measuredangle DAE = 90° - 60° = 30°$
  ($\measuredangle BAD$: Innenwinkel im Quadrat, $\measuredangle EAD$: Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck)
- $\measuredangle EDF = \measuredangle EDC + \measuredangle CDF = \measuredangle ADC - \measuredangle ADE + \measuredangle CDF = 90° - 60° + 60° = 90°$
  ($\measuredangle ADC$: Innenwinkel im Quadrat, $\measuredangle ADE$: Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck, $\measuredangle CDF$: Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck)

Zwischenergebnis:



Nun folgt:

- $\measuredangle FED = \frac{180° - \measuredangle EDF}{2} = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$ ($\triangle FDE$ ist gleichschenklig)
- $\measuredangle AEB = \frac{180° - \measuredangle BAE}{2} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$ ($\triangle EAB$ ist gleichschenklig)



Also ist

$$\alpha = 360° - (\measuredangle AEB + \measuredangle DEA + \measuredangle FED) = 360° - (75° + 60° + 45°) = 180°$$

Aufgabe MG1: Die 4-stellige Zahl $7a1b$ mit den Ziffern $a, b \in \{0, \ldots, 9\}$ ist durch 45 teilbar. Bestimme alle Möglichkeiten für die unbekannten Ziffern a und b.

Lösungsvorschlag:

Da die Zahl $7a1b$ durch 45 teilbar ist, ist sie auch durch 5 und durch 9 teilbar.

Da $7a1b$ durch 5 teilbar ist, muss auch die letzte Ziffer b durch 5 teilbar sein. Also ist $b = 0$ oder $b = 5$.

<u>1.Fall</u> $b = 0$

Da $7a10$ durch 9 teilbar ist, ist auch die Quersumme $7 + a + 1 + 0 = 8 + a$ durch 9 teilbar. Somit ist $a = 1$.

<u>1.Fall</u> $b = 5$

Da $7a15$ durch 9 teilbar ist, ist auch die Quersumme $7 + a + 1 + 5 = 13 + a$ durch 9 teilbar. Somit ist $a = 5$.

$$\boxed{\text{Lösung: } a = 1, b = 0 \text{ oder } a = 5, b = 5}$$

Aufgabe MG2: Eine Digitaluhr zeigt Stunden, Minuten und Sekunden mit jeweils 2 Ziffern an. Manchmal kommt es dabei zu Anzeigen, die vorwärts und rückwärts gelesen identisch sind (beispielsweise: 02:55:20 Uhr oder 14:00:41 Uhr).

Wie oft kommt das an einem Tag (also von 00:00:00 Uhr bis 23:59:59 Uhr) vor?

Lösungsvorschlag:
Bei einer solchen Anzeige muss die Anzeige der Minuten aus zwei gleichen Ziffern bestehen und die beiden Ziffern der Stundenanzeigen müssen den beiden Ziffern für die Sekundenanzeige in umgekehrter Reihenfolge entsprechen.

Wir betrachten zunächst alle Möglichkeiten für die beiden Ziffern der Stundenanzeige und kontrollieren dann, ob die umgekehrten Ziffern bei der Sekundenanzeige möglich sind:

Ziffernanzeige für Stunden	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
umgekehrte Anzeige	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90	01	11	21	31	41	51	61	71	81	91	02	12	22	32
möglich bei Sekundenanzeige ?	j	j	j	j	j	j	n	n	n	n	j	j	j	j	j	j	n	n	n	n	j	j	j	j

Es gibt also 16 Möglichkeiten für die Stundenanzeige (die Sekundenanzeige liegt dann fest). Für jede dieser 16 Möglichkeiten gibt es 6 Möglichkeiten für die Minutenanzeige (nämlich $00, 11, 22, 33, 44, 55$). Also insgesamt: $16 \cdot 6 = 96$ Möglichkeiten

Lösung: An einem Tag kommt 96-mal eine Anzeige vor, die vorwärts und rückwärts gelesen identisch ist.

Aufgabe MG3: Ein Zug fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Zwei Autos fahren auf einer Autobahn, die parallel zu den Gleisen verläuft. Das erste Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von $120km/h$, das zweite Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von $100km/h$. Der Zug fährt langsamer als beide Autos.

Um den fahrenden Zug zu überholen (also vom hinteren Ende des Zuges ans vordere Ende des Zuges zu fahren), benötigt das zweite Auto dreimal solange wie das erste.

Wie schnell fährt der Zug?

Lösungsvorschlag:
Ist v_Z die Geschwindigkeit und ℓ die Länge des Zuges und sind t_1, t_2 die Zeiten, die die beiden Autos zum Überholen des Zuges brauchen, so gilt:

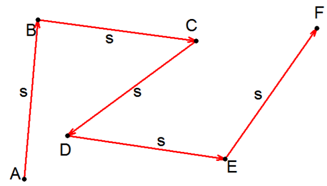
$$\begin{aligned}
\text{(I)} &: (120\text{km/h} - v_Z) \cdot t_1 = \ell \\
\text{(II)} &: (100\text{km/h} - v_Z) \cdot t_2 = \ell \\
\text{(III)} &: t_2 = 3t_1
\end{aligned}$$

Setzt man (I) und (II) gleich, so folgt:

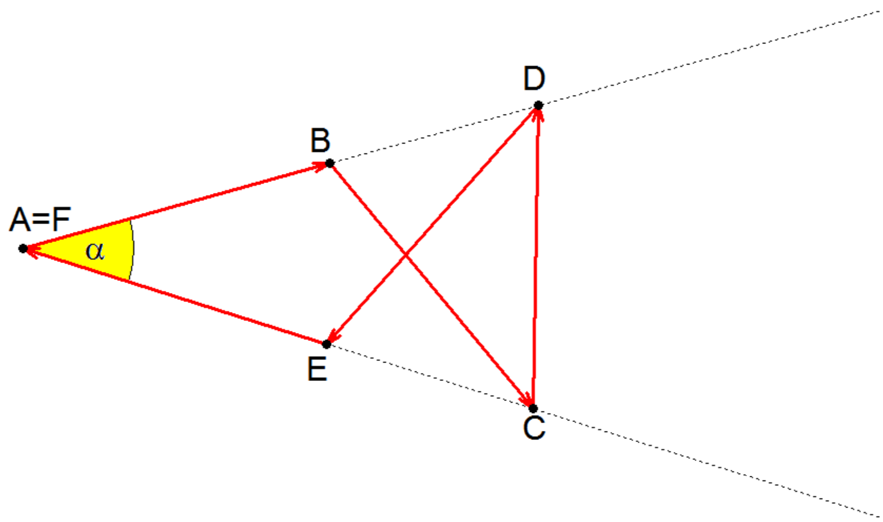
$$\begin{aligned}
(120\text{km/h} - v_Z) \cdot t_1 = (100\text{km/h} - v_Z) \cdot t_2 &\overset{\text{(III)}}{\Leftrightarrow} (120\text{km/h} - v_Z) \cdot t_1 = (100\text{km/h} - v_Z) \cdot (3t_1) \\
&\Leftrightarrow 120\text{km/h} - v_Z = (100\text{km/h} - v_Z) \cdot 3 \\
&\Leftrightarrow 120\text{km/h} - v_Z = 300\text{km/h} - 3v_Z \\
&\Leftrightarrow 2v_Z = 180\text{km/h} \\
&\Leftrightarrow v_Z = 90\text{km/h}
\end{aligned}$$

Lösung: Der Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 90km/h.

Aufgabe MG4: Gegeben ist ein Zollstock, bestehend aus 5 gleich langen Stäben der Länge s, deren Enden drehbar miteinander verbunden sind.



Er wird nun so geformt, dass die Punkte A, B, D bzw. A, C, E auf einer Geraden liegen und der Punkt F mit dem Punkt A übereinstimmt:



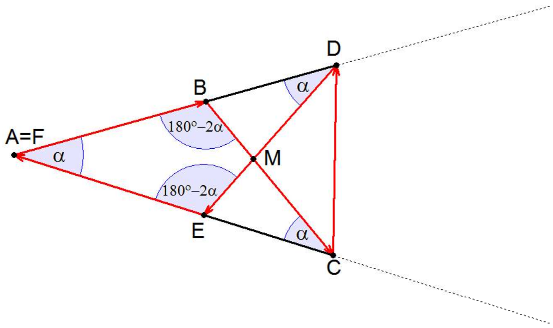
Bestimme den Winkel α.

Lösungsvorschlag:

Die Dreiecke $\triangle ACB$ und $\triangle AED$ sind gleichschenklig. Daher gilt:

$$\measuredangle ACB = \measuredangle BAC = \alpha \quad \text{und} \quad \measuredangle CBA = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\measuredangle EDA = \measuredangle DAE = \alpha \quad \text{und} \quad \measuredangle AED = 180^\circ - 2\alpha$$

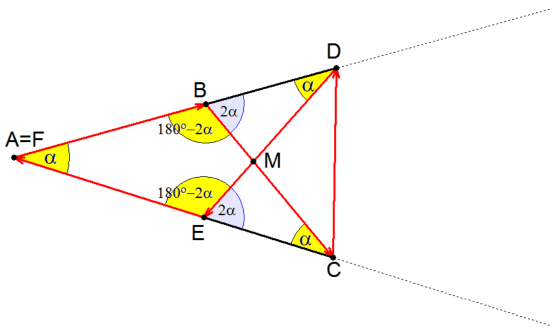


Da die Punkte D, B, A auf einer Geraden liegen ist:

$$\measuredangle DBC + \underbrace{\measuredangle CBA}_{=180^\circ - 2\alpha} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle DBC = 2\alpha$$

Analog: Da die Punkte A, E, C auf einer Geraden liegen ist:

$$\underbrace{\measuredangle AED}_{=180^\circ - 2\alpha} + \measuredangle DEC = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle DEC = 2\alpha$$



Weiterhin gilt:

$$\triangle CDE \text{ gleichschenklig} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle ECD = \measuredangle DEC = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle BCD = \measuredangle ECD - \measuredangle ECB = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

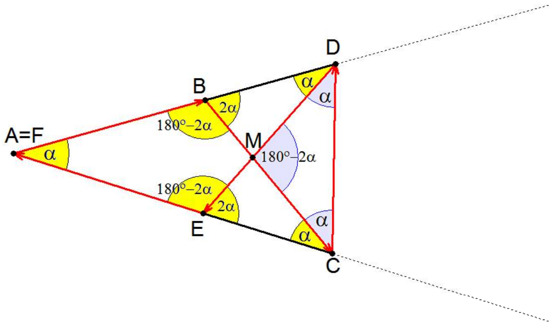
und analog:

$$\triangle BCD \text{ gleichschenklig} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle CDB = \measuredangle DBC = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle CDE = \measuredangle CDB - \measuredangle EDB = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

Im Dreieck $\triangle DMC$ ist die Summe der Innenwinkel 180°, also folgt:

$$\measuredangle DMC = 180^\circ - \underbrace{\measuredangle MCD}_{=\measuredangle BCD=\alpha} - \underbrace{\measuredangle CDM}_{=\measuredangle CDE=\alpha} = 180^\circ - 2\alpha$$

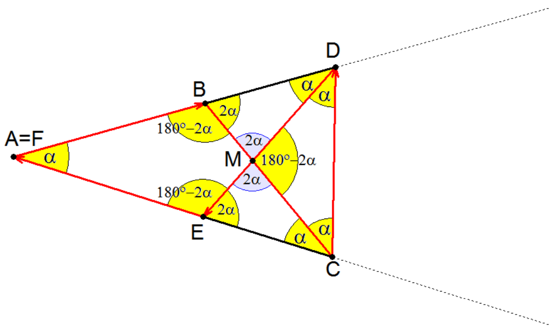


Da die Punkte B, M, C auf einer Geraden liegen ist:

$$\measuredangle BMD + \underbrace{\measuredangle DMC}_{=180^\circ-2\alpha} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle BMD = 2\alpha$$

Analog: Da die Punkte D, M, E auf einer Geraden liegen ist:

$$\underbrace{\measuredangle DMC}_{=180^\circ-2\alpha} + \measuredangle CME = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \measuredangle CME = 2\alpha$$

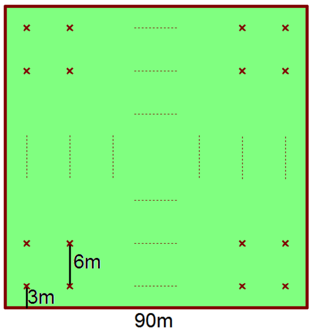


Da die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\triangle CME$ (bzw. analog $\triangle BMD$) 180° beträgt, folgert man:

$$\underbrace{\alpha + 2\alpha + 2\alpha}_{=5\alpha} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

$\boxed{\text{Lösung: } \alpha = 36^\circ.}$

Aufgabe MS1: Ein quadratischer Obstgarten hat eine Seitenlänge von 90 Metern und ist von einem Zaum begrenzt. Im Garten stehen Bäume in Reihen, die parallel zum Zaun verlaufen. Die Bäume haben einen Abstand von 3m zum Zaun und von 6m zueinander (siehe Skizze).



Wieviele Bäume stehen im Garten?

Lösungsvorschlag:

Die Bäume in den Ecken bilden ein Quadrat mit der Seitenlänge $90m - 2 \cdot 3m = 84m$.

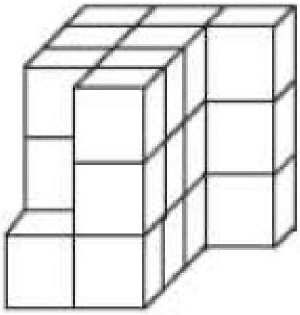
Auf einer Seite dieses Quadrats stehen dabei $\frac{84m}{6m} + 1 = 15$ Bäume.

Die Bäume bilden also ein 15×15-Gitter.

Somit sind es insgesamt $15 \cdot 15 = 225$ Bäume.

Lösung: Im Garten stehen 225 Bäume.

Aufgabe MS2: Das folgende Gebilde besteht aus einzelnen **losen** kleinen Würfeln, die alle gleich groß sind.



(a) Aus wievielen kleinen Würfeln besteht das vorhandene Gebilde **mindestens**?

(b) Wieviele weitere kleine Würfel braucht man nun mindestens, um das Gebilde zu einem großen Würfel zu ergänzen. (Dabei dürfen die vorhandenen kleinen Würfel NICHT umgebaut werden.)

Lösungsvorschlag:

(a) Das vorhandene Gebilde besteht aus

$$\underbrace{4+2\cdot 3}_{\text{rechts}} + \underbrace{3\cdot 4}_{\text{Mitte}} + \underbrace{3\cdot 1}_{\text{links}} = 10+12+3=25$$

kleinen Würfeln.

$\boxed{\text{Lösung: Das Gebilde besteht mindestens aus 25 kleinen Würfeln.}}$

(b) Man muss das Gebilde mindestens zu einem $4\times 4\times 4$-Würfel ergänzen, dieser muss dann insgesamt aus $4\cdot 4\cdot 4=64$ kleinen Würfeln bestehen.

Benötigt werden also noch $64-25=39$ kleine Würfel.

$\boxed{\text{Lösung: Man benötigt mindestens 39 kleine Würfel.}}$

Aufgabe MS3: In einem Rennen über 1000 Meter schlägt der Hund die Katze um 200 Meter. Die Katze wiederum schlägt in einem Rennen über 1000 Meter die Maus um 250 Meter. (Hund, Katze und Maus laufen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit.)
Mit welchem Vorsprung gewinnt der Hund ein 1000-Meter-Rennen gegen die Maus?

Lösungsvorschlag 1:
Wir bezeichnen mit v_H, v_K und v_M die Geschwindigkeiten von Hund, Katze und Maus. Aus den angegebenen Informationen ergibt sich:

$$v_K = \frac{1000m - 200m}{1000m} \cdot v_H = \frac{4}{5} \cdot V_H \quad \text{und} \quad v_M = \frac{1000m - 250m}{1000m} \cdot v_K = \frac{3}{4} \cdot V_K$$

Folglich ist:

$$v_M = \frac{3}{4} \cdot v_K = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot V_H = \frac{3}{5} \cdot V_H$$

Während der Hund $1000m$ zurücklegt, schafft die Maus also nur $\frac{3}{5} \cdot 1000m = 600m$, und wird daher um $1000m - 600m = 400m$ geschlagen.

Lösung: Der Hund schlägt die Maus um 400 Meter.

Lösungsvorschlag 2:
Während der Hund $1000m$ zurücklegt, schafft die Katze nur $1000m - 200m = 800m$.

Es stellt sich also die Frage, welche Strecke die Maus schafft, während die Katze $800m$ zurücklegt.

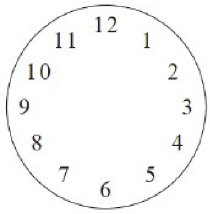
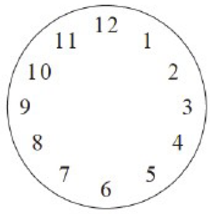
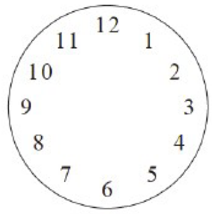
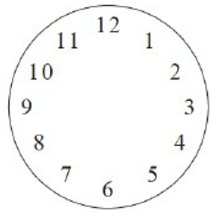
Während die Katze $1000m$ zurücklegt, schafft die Maus $1000m - 250m = 750m$.

Daraus folgt: Während die Katze $800m = \frac{4}{5} \cdot 1000m$ zurücklegt, schafft die Maus also $\frac{4}{5} \cdot 750m = 600m$.

Also: Während der Hund $1000m$ zurücklegt, schafft die Katze $800m$ und die Maus $600m$. Die Maus wird daher vom Hund um $1000m - 600m = 400m$ geschlagen.

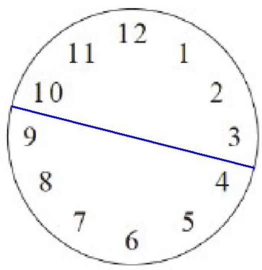
Lösung: Der Hund schlägt die Maus um 400 Meter.

Aufgabe MS4: Teile die Uhr in 2,3,4 bzw. 6 Teilflächen, so dass die Summe der Zahlen in jeder Teilfläche gleich groß ist.
ACHTUNG: Eine der 4 Aufgaben ist nicht lösbar. Begründe, warum es nicht geht.

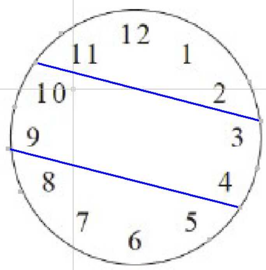
2 Teilflächen	3 Teilflächen	4 Teilflächen	6 Teilflächen
			

Lösungsvorschlag:
Die Summe aller Zahlen in der Uhr ist: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78$

- Bei der Teilung in 2 Flächen ist die Zahlensumme in jeder Fläche $78 : 2 = 39$.

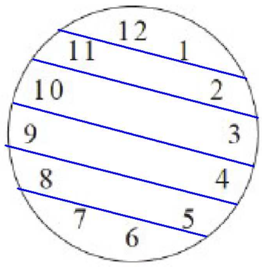


- Bei der Teilung in 3 Flächen ist die Zahlensumme in jeder Fläche $78 : 3 = 26$.



- Bei der Teilung in 4 Flächen müsste die Zahlensumme in jeder Fläche $78 : 4 = 19,5$ sein. Dies ist nicht möglich, da $19,5$ keine natürliche Zahl ist.

- Bei der Teilung in 6 Flächen ist die Zahlensumme in jeder Fläche $78 : 6 = 13$.



Aufgabe MS5: Welches ist die kleinste natürliche Zahl, für die gilt:

- Wenn man sie durch 2 teilt, bleibt der Rest 1.
- Wenn man sie durch 3 teilt, bleibt der Rest 2.
- Wenn man sie durch 4 teilt, bleibt der Rest 3.
- Wenn man sie durch 5 teilt, bleibt der Rest 4.
- Wenn man sie durch 6 teilt, bleibt der Rest 5.

Lösungsvorschlag:
Ist n die gesuchte Zahl, so muss $n+1$ die kleinste Zahl sein, die durch $2, 3, 4, 5$ und 6 teilbar ist. Es gilt also:

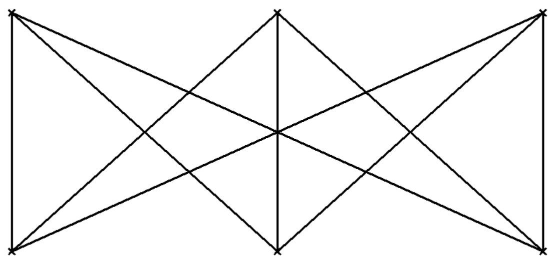
$$n + 1 = \text{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 60 \quad \Rightarrow \quad n = 59$$

$$\boxed{\text{Lösung: } 59}$$

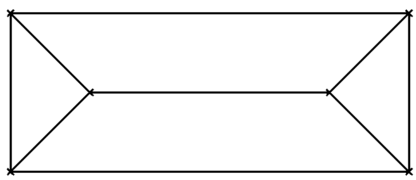
Aufgabe MS6: Zeichne 6 Punkte in der Ebene und Verbindungslinien zwischen einigen der Punkte. Dabei soll jeder Punkt mit genau 3 anderen Punkten direkt durch eine Linie verbunden sein. (Die Linien dürfen sich dabei auch schneiden.)

Lösungsvorschläge:

- Man kann die Punkte in zwei Dreiergruppen aufteilen und dann jeden Punkt einer Gruppe mit jedem Punkt der anderen verbinden.



- Man kann die Punkte in zwei Dreiergruppen aufteilen und dann alle Punkte einer Gruppe untereinander verbinden. Anschließend verbindet man noch jeden Punkt einer Gruppe mit einem zugeordneten Punkt der anderen Gruppe.



(Abgesehen davon, dass man die Punkte noch anders anordnen kann, gibt es keine weiteren Lösungen.)

Aufgabe MS7: Kann man auch 7 Punkte in der Ebene so durch Linien miteinander verbinden, dass jeder Punkt mit genau 3 anderen Punkten direkt verbunden ist? (Begründet kurz eure Antwort.)

Lösungsvorschlag:

Lösung: Dies ist nicht möglich.

Begründung:

Von jedem der 7 Punkte müssten 3 Linien abgehen. Also gäbe es insgesamt $3 \cdot 7 = 21$ "Linienabgänge" von den Knoten. Da jede Linie aber genau 2 solche Abgänge hat, müssten es insgesamt genau $21 : 2 = 10{,}5$ Linien sein. Dies kann nicht sein, denn die Anzahl der Linien muss eine natürliche Zahl sein.

Aufgabe MS8: 10 kg frische Erdbeeren, die zu 99% aus Wasser bestehen, werden leider in der Sonne stehengelassen. Dadurch trocknen sie aus und enthalten nach einigen Stunden nur noch 98% Wasser.
Wieviel wiegen sie noch?

Lösungsvorschlag:
Die Erdbeeren bestehen aus Wasser und einem "Rest".

1.) Zu Beginn wiegen die Erdbeeren insgesamt 10 kg, davon sind:

$$\begin{array}{lrcll} -) & 99\% \text{ (von 10kg)} & = & 9,9\text{kg} & \text{Wasser} \\ -) & 1\% \text{ (von 10kg)} & = & 0,1\text{kg} & \text{Rest} \end{array}$$

2.) Nach einigen Stunden hat sich das Gesamtgewicht verändert, ebenfalls geändert hat sich das Gewicht des Wassers in den Erdbeeren. Hingegen ist das Gewicht des Restes konstant geblieben, es beträgt nach wie vor $0,1$kg. Also:

$$\begin{array}{lrcll} -) & 98\% \text{ (von } \mathbf{?}) & = & \mathbf{?} & \text{Wasser} \\ -) & 2\% \text{ (von } \mathbf{?}) & = & 0,1\text{kg} & \text{Rest} \end{array}$$

Da 2% des neuen Gesamtgewichts nun also 0.1kg sind, wiegen die Erdbeeren nun insgesamt noch $\frac{0.1\text{kg}}{2\%} = 5$kg.

$\boxed{\text{Lösung: Die Erdbeeren wiegen nun noch 5kg.}}$