Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

mit Lösungen

Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

Aufgabe OG1:

Zwei gerade Straßen treffen im rechten Winkel aufeinander. Eine Person A befindet sich auf einer der beiden Straßen genau 100 Meter von der Kreuzung entfernt. Eine weitere Person B befindet sich genau an der Kreuzung. Während sich A auf die Kreuzung zubewegt, bewegt sich B auf der anderen Straße von der Kreuzung weg. (Beide starten zeitgleich und bewegen sich jeweils mit konstanter Geschwindigkeit.)

(a) Wie nahe (Luftlinie) kommen A und B sich minimal, wenn die Geschwindigkeit von B genau $\frac{4}{3}$ der Geschwindigkeit von A beträgt ?

(b) Verallgemeinern Sie (a) wie folgt: Wie nahe kommen A und B sich minimal, wenn die Geschwindigkeit von B genau das c-fache der Geschwindigkeit von A beträgt ? (Beantworten Sie dies in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}^+$.)

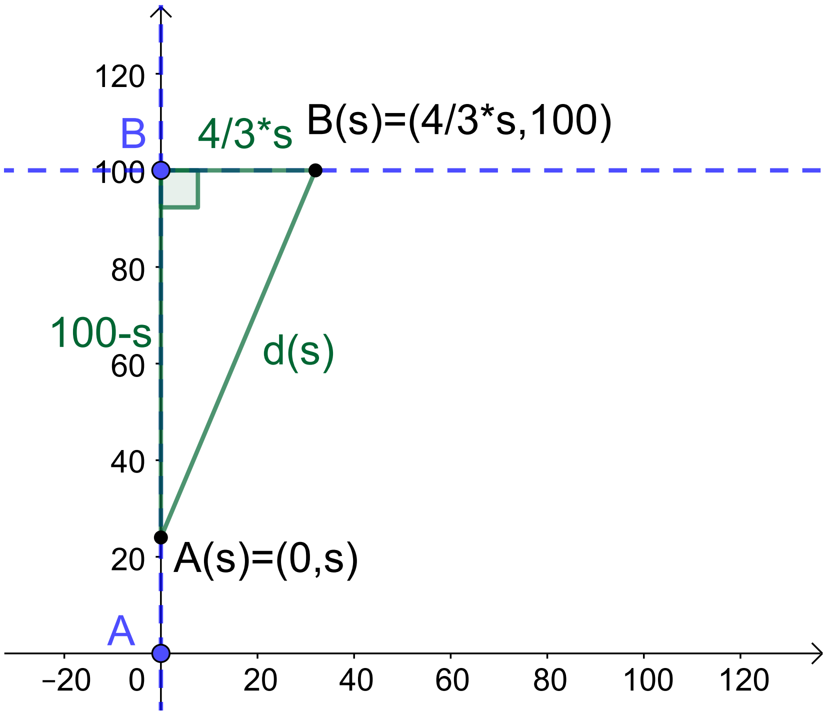
(c) Wie schnell ist B, wenn sich A mit 72km/h bewegt und der minimale Abstand von A und B genau 28 Meter beträgt?

Hinweis: Das Ergebnis (in km/h) ist ganzzahlig. Hilfreich ist die Gleichung $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Lösung OG1:

(a) Wir betrachten ein Koordinatensystem, bei dem die Straßen die Koordinatenachsen sind, wobei der Nullpunkt der Startpunkt von A und der Punkt $(0,100)$ der Startpunkt von B ist. (B starte in positive x-Richtung.)

Abhängig von der Strecke $s \in [0,\infty[$ die A zurückgelegt hat, befindet sich A dann im Punkt $A(s) = (0,s)$ und B im Punkt $B(s) = \left(\frac{4}{3}\cdot s, 100\right)$.



Für den Abstand $d(s)$ zwischen A und B (in Abhängigkeit von s) gilt dann (Pythagoras):

$$d(s)^2 = (100\text{m} - s)^2 + \left(\frac{4}{3}\cdot s\right)^2 = 10000\text{m}^2 - 200\text{m}\cdot s + \underbrace{s^2 + \frac{16}{9}\cdot s^2}_{=\frac{25}{9}\cdot s^2} = \frac{25}{9}\cdot s^2 - 200\text{m}\cdot s + 10000\text{m}^2$$

Wir betrachten die Funktion: $\quad f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(s) = \frac{25}{9}\cdot s^2 - 200\cdot s + 10000$

Da d genau dann minimal wird, wenn d^2 minimal wird (wegen $d(s) \geq 0$ für alle $s \in [0,\infty)$) können wir auch die Minimumstelle von f suchen. Diese ergibt sich mittels:

$$f'(s) = 0 \iff \frac{50}{9}\cdot s - 200 = 0 \iff s = \frac{200\cdot 9}{50} \iff s = 36$$

(Die Nullstelle der Ableitung von f ist hier garantiert eine Minimumstelle von f, da es sich bei f um eine nach oben geöffnete Parabel handelt.)

Der Abstand zwischen A und B wird also minimal, wenn A genau 36 Meter zurückgelegt hat und beträgt dann:

$$d_{\min} = d(36\text{m}) = \sqrt{(100\text{m} - 36\text{m})^2 + \left(\frac{4}{3}\cdot 36\text{m}\right)^2} = \sqrt{(64\text{m})^2 + (48\text{m})^2} = 16\cdot\sqrt{((4\text{m})^2 + (3\text{m})^2)} = 16\cdot\sqrt{25\text{m}^2} = 80\text{m}$$

(b) Analog zu (a) haben wir nun:

$$d(s)^2 = (100\text{m} - s)^2 + (c \cdot s)^2 = 10000\text{m}^2 - 200\text{m} \cdot s + (1 + c^2) \cdot s^2$$

Wir betrachten:

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \; f(s) = (1 + c^2) \cdot s^2 - 200 \cdot s + 10000$$

und erhalten die Minimustelle von f mittels:

$$f'(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(1 + c^2) \cdot s - 200 = 0 \;\Leftrightarrow\; s = \frac{100}{1 + c^2}$$

Der Abstand zwischen A und B wird also minimal, wenn A genau $\frac{100\text{m}}{1+c^2}$ zurückgelegt hat und in diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}
d(s)^2 &= \left(100\text{m} - \frac{100\text{m}}{1 + c^2}\right)^2 + \left(c \cdot \frac{100\text{m}}{1 + c^2}\right)^2 \\
&= (100\text{m})^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{1 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{1 + c^2}\right)^2\right] \\
&= (100\text{m})^2 \cdot \left[\left(\frac{c^2}{1 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{1 + c^2}\right)^2\right] \quad \left(\underline{\text{beachte:}}\; 1 - \frac{1}{1 + c^2} = \frac{1 - c^2 + 1}{1 + c^2} = \frac{c^2}{1 - c^2}\right) \\
&= (100\text{m})^2 \cdot \frac{c^4 + c^2}{(1 + c^2)^2} \\
&= (100\text{m})^2 \cdot \frac{c^2 \cdot (1 + c^2)}{(1 + c^2)^2} \\
&= (100\text{m})^2 \cdot \frac{c^2}{(1 + c^2)}
\end{aligned}$$

Folglich beträgt der minimale Abstand zwischen A und B in Abhängigkeit von c:

$$d_{\min} = \sqrt{(100\text{m})^2 \cdot \frac{c^2}{(1 + c^2)}} = 100\text{m} \cdot \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}$$

(c) Sei nun $d_{\min} = 28\text{m}$. Dann folgt nach (b):

$$\begin{aligned}
100\text{m} \cdot \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} = 28\text{m} \quad &\overset{:100\text{m}\cdot\sqrt{1+c^2}}{\Leftrightarrow} \quad c = 0.28 \cdot \sqrt{1 + c^2} \\
&\overset{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow} \quad c^2 = 0.28^2 \cdot (1 + c^2) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1 - 0.28^2\right) \cdot c^2 = 0.28^2 \\
&\overset{:(1-0.28^2)}{\Leftrightarrow} \quad c^2 = \frac{0.28^2}{1 - 0.28^2} \\
&\overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftrightarrow} \quad c = \frac{0.28}{\sqrt{1 - 0.28^2}}
\end{aligned}$$

Dabei gilt $0.28 = \frac{4}{100} \cdot 7 = \frac{7}{25}$ und:

$$\sqrt{1 - 0.28^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{25^2 - 7^2}{24^2}} \overset{\text{Hinweis}}{=} \sqrt{\frac{24^2}{25^2}} = \frac{24}{25}$$

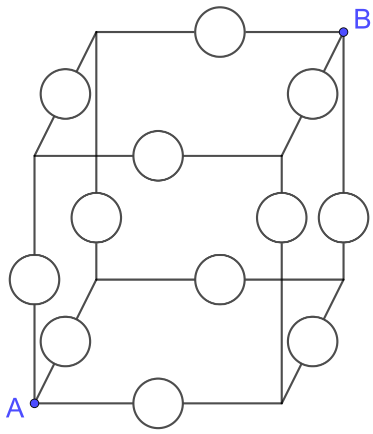
Setzt man dies oben ein, so folgt: $\quad c = \frac{(7/25)}{(24/25)} = \frac{7}{24}$

Folglich ist die Geschwindigkeit von B das $\frac{7}{24}$-fache der Geschwindigkeit von A und beträgt somit: $\quad \frac{7}{24} \cdot 72\text{km/h} = 21\text{km/h}$

Aufgabe OG2:
Bei einem Würfel gibt es 6 Wege vom Punkt A zum Punkt B, die jeweils über 3 Kanten des Würfels verlaufen. Ordnen Sie jeweils die angegebenen Zahlen so den 12 Kanten (jeweils eine Zahl pro Kante) zu, dass die Summe der den 3 Kanten eines Wegs zugeordneten Zahlen für jeden der 6 Wege diesselbe ist.

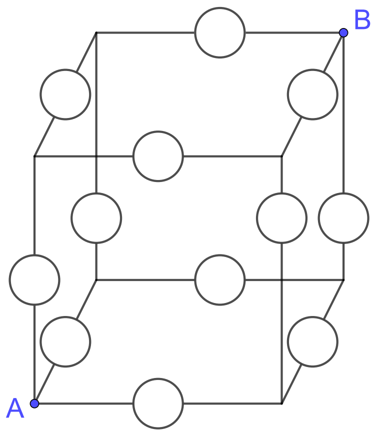
Anmerkung: Bei jedem Aufgabenteil kann der Wert der Summe ein anderer sein. Es gibt für jeden Aufgabenteil mehrere Lösungen. (Eine Lösung genügt jeweils.)

(a)



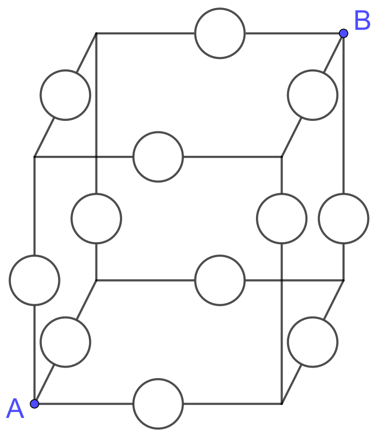
zuzuordnende Zahlen:
1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3

(b)



zuzuordnende Zahlen:
1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3

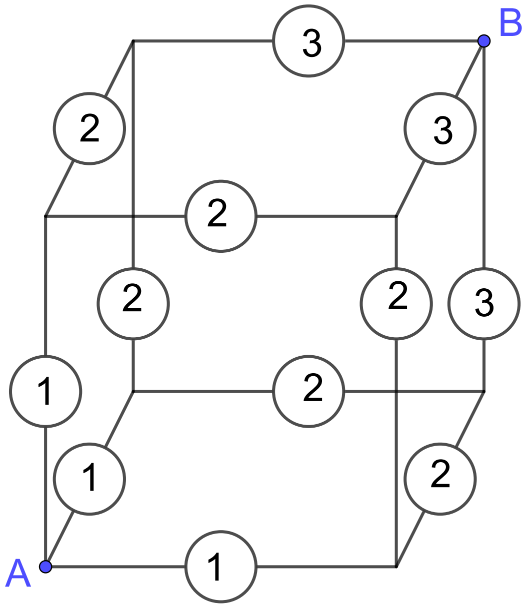
(c)



zuzuordnende Zahlen:
1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6

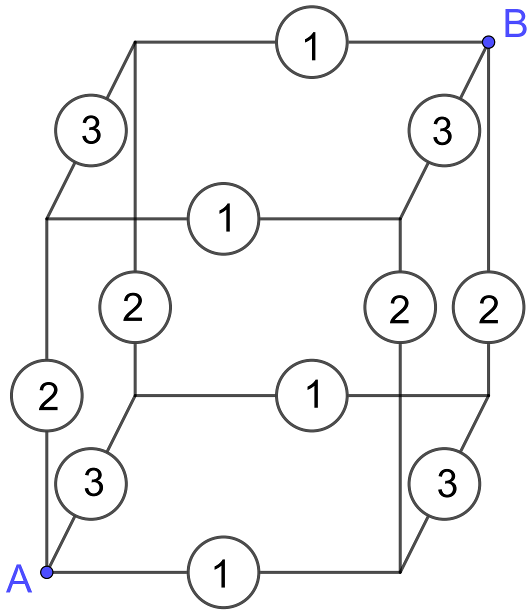
Lösung OG2:

(a)



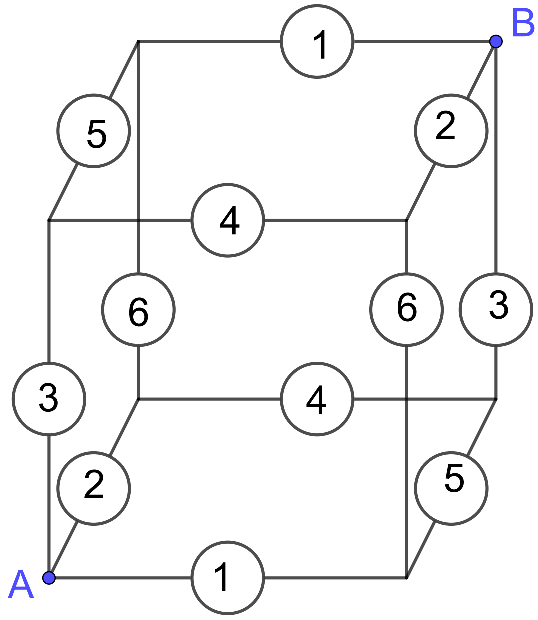
Idee der Lösung: Die drei Kanten, die an A grenzen (und somit von jedem Weg zuerst durchlaufen werden) erhalten eine 1. Die sechs Kanten, die weder an A noch an C grenzen (und somit von jedem Weg als zweites durchlaufen werden), erhalten eine 2. Die drei Kanten, die an C grenzen (und somit von jedem Weg zuletzt durchlaufen werden) erhalten eine 3.

(b)



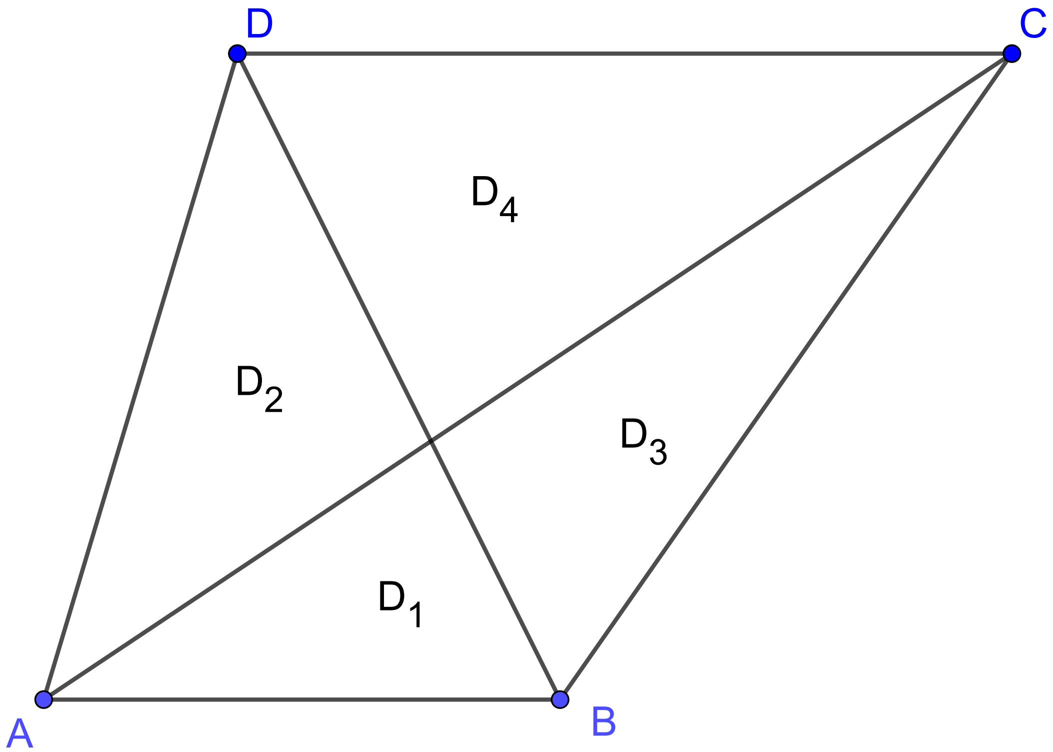
Idee der Lösung: Parallele Kanten erhalten diesselben Zahlen. In diesem Fall erhalten die vier nach rechts führenden Kanten eine 1, die vier nach oben führenden Kanten eine 2 und die vier nach hinten führenden Kanten eine 3.

(c)



Idee der Lösung: Die drei Kanten, die an A grenzen (und somit von jedem Weg zuerst durchlaufen werden) erhalten die Zahlen $1, 2, 3$. Die drei Kanten, die an C grenzen (und somit von jedem Weg zuletzt durchlaufen werden) erhalten ebenfalls die Zahlen $1, 2, 3$, wobei diese so angeordnet werden, dass kein Weg zweimal diesselbe Zahl durchläuft. Schließlich werden die verbleibenden Zahlen so auf die sechs Kanten, die weder an A noch an C grenzen (und somit von jedem Weg als zweites durchlaufen werden) verteilt, dass die Summe der Zahlen über jeden Weg gleich ist. (Die beiden Wege mit 1 und 2 an Anfang und Ende bekommen in der Mitte eine 6. Die beiden Wege mit 1 und 3 an Anfang und Ende bekommen in der Mitte eine 5. Die beiden Wege mit 2 und 3 an Anfang und Ende bekommen in der Mitte eine 4.)

Aufgabe OG3:
Ein Trapez $\square ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ wird durch seine beiden Diagonalen in vier Dreiecke D_1, D_2, D_3, D_4 zerlegt (siehe Skizze).



Dabei gilt:

- Der Flächeninhalt des gesamten Trapezes $\square ABCD$ beträgt 1m^2.
- Der Flächeninhalt von D_1 beträgt 1600cm^2.

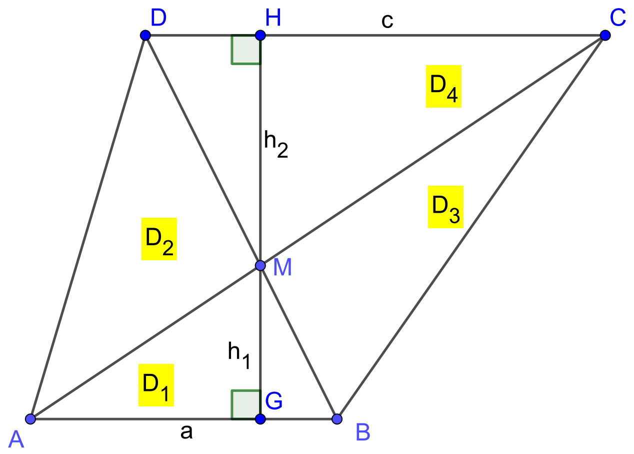
Bestimmen Sie die Flächeninhalte der Dreiecke D_2, D_3 und D_4.

Lösung OG3:

Wir bezeichnen $a = |\overline{AB}|$ und $c = |\overline{CD}|$ die Längen der beiden parallelen Seiten.

Zudem zeichnen wir die Höhe des Trapezes, so als Strecke $\overline{GH}$ ein, dass $G \in \overline{AB}$, $H \in \overline{BC}$ und $M \in \overline{GH}$, wobei M der Diagonalenschnittpunkt ist.

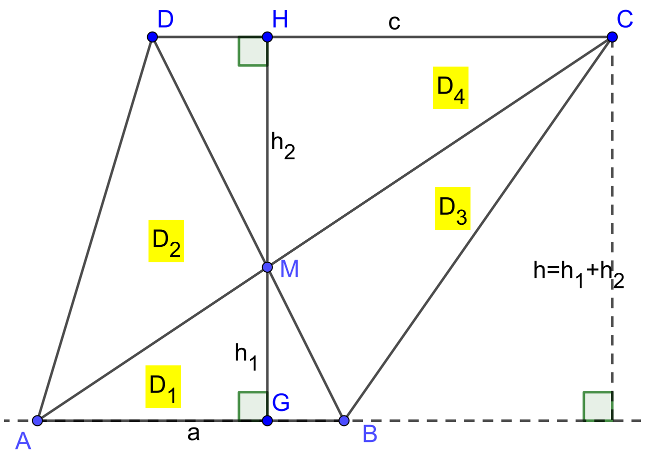
Weiter seien $h_1 = |\overline{GM}|$ und $h_2 = |\overline{HM}|$.



Nach der Flächeinhaltformel für Dreieck gilt:

$$\underbrace{F(D_1) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1}_{(1)} \quad \text{und} \quad \underbrace{F(D_4) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_2}_{(4)}$$

Die Höhe von C auf AB hat die Länge $h = h_1 + h_2$ (da AB und CD parallel sind) und somit gilt:



$$F(D_1) + F(D_3) = F(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad \Rightarrow \quad F(D_3) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h - F(D_1) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{F(D_3) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2}_{(3)}$$

Analog folgt mit dem Dreieck $\triangle ACD$, dass: $\underbrace{F(D_2) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_1}_{(2)}$

Weiterhin gilt nun nach zweimaliger Anwendung des Strahlensatzes (da AB und CD parallel sind):

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{MD}|} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{h_2 = \frac{c}{a} \cdot h_1}_{(*)}$$

Mit $u := \frac{c}{a}$ folgt nun:

$$\begin{aligned}
F(D_2) &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_1 = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 \overset{(1)}{=} u \cdot F(D_1) \\
F(D_3) &\overset{(3)}{=} \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2 \overset{(*)}{=} \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 \overset{(1)}{=} u \cdot F(D_1) \\
F(D_4) &\overset{(4)}{=} \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_2 = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_2 \overset{(*)}{=} \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 \overset{(1)}{=} u^2 \cdot F(D_1)
\end{aligned}$$

Zusammen haben wir:

$$F(\square ABCD) = F(D_1) + F(D_2) + F(D_3) + F(D_4) = \left(1 + 2 \cdot u + u^2\right) \cdot F(D_1) = (1+u)^2 \cdot F(D_1)$$

Also folgt:

$$(1+u)^2 = \frac{F(\square ABCD)}{F(D_1)} \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1\text{m}^2}{1600\text{cm}^2} = \frac{10000\text{cm}^2}{1600\text{cm}^2} = \frac{25}{4} \quad \overset{\sqrt{\cdot}}{\Rightarrow} \quad 1 + u = \frac{5}{2} \quad \overset{-1}{\Rightarrow} \quad u = \frac{3}{2}$$

Schließlich ergibt sich:

$$\begin{aligned}
F(D_2) &= u \cdot F(D_1) &&= \tfrac{3}{2} \cdot 1600\text{cm}^2 &&= 2400\text{cm}^2 \\
F(D_3) &= u \cdot F(D_1) &&= \tfrac{3}{2} \cdot 1600\text{cm}^2 &&= 2400\text{cm}^2 \\
F(D_4) &= u^2 \cdot F(D_1) &&= \tfrac{9}{4} \cdot 1600\text{cm}^2 &&= 3600\text{cm}^2
\end{aligned}$$

Aufgabe OG4:
In einer Lostrommel befinden sich a weiße und b schwarze Kugeln. Dabei gilt $a \leq b$ und $2 \leq a+b \leq 50$.

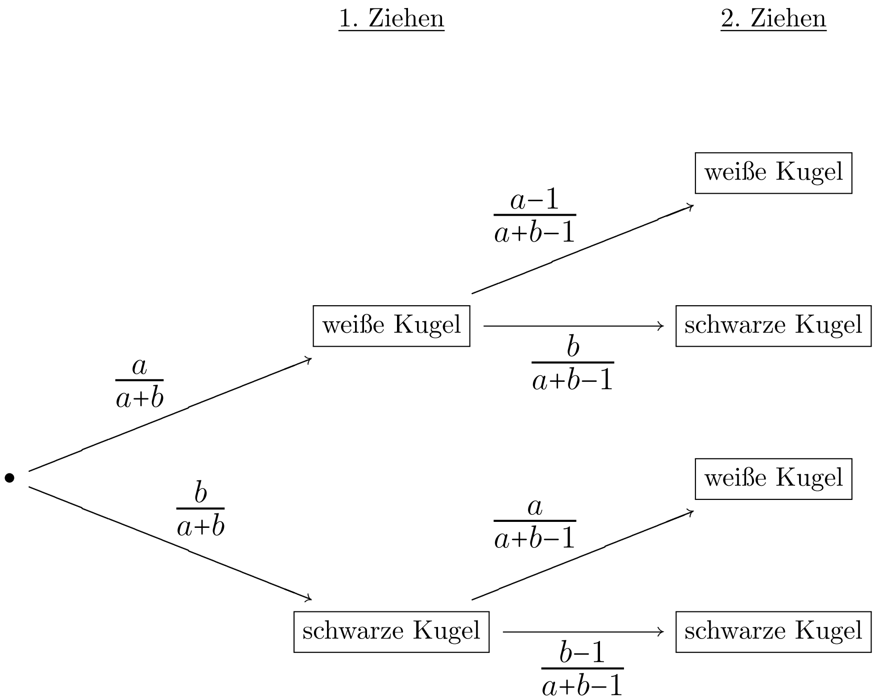
Wenn man zufällig zwei Kugeln ohne Zurücklegen zieht, beträgt die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, genau 50%.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für a und b.

Lösung OG4:

Wir bestimmen zunächst in Abhängigkeit von a und b die Wahrscheinlichkeit P, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen.

mithilfe eines Baumdiagramms:



Dabei können wir davon ausgehen, dass $a \geq 1$ und $b \geq 1$ ist, denn im Fall $a = 0$ oder $b = 0$ ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Kugeln zu ziehen, stets $1 \neq \frac{1}{2}$.

Somit ergibt sich:

$$P = \underbrace{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}}_{\text{zwei weiße Kugeln}} + \underbrace{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1}}_{\text{zwei schwarze Kugeln}} = \frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

alternativ kombinatorisch:

Insgesamt gibt es $(a+b)\cdot(a+b-1)$ Möglichkeiten aus den $a+b$ insgesamt vorhandenen Kugeln zwei Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen. Für zwei weiße Kugeln gibt es hierbei $a\cdot(a-1)$ Möglichkeiten und für zwei schwarze Kugeln gibt es $b\cdot(b-1)$ Möglichkeiten. Also folgt:

$$P = \frac{\text{Anzahl der Möglichkeiten für zwei gleichfarbige Kugeln}}{\text{Anzahl der Möglichkeiten insgesamt}} = \frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

Laut Aufgabenstellung gilt nun:

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{2} \overset{\text{siehe oben}}{\Leftrightarrow} \frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{1}{2} \quad &\overset{\cdot 2(a+b)(a+b-1)}{\Leftrightarrow} \quad 2\big(a(a-1)+b(b-1)\big) = (a+b)(a+b-1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2a^2 - 2a + 2b^2 - 2b = a^2 + b^2 + 2ab - a - b \\ &\overset{-a^2-b^2+2a+2b-2ab}{\Leftrightarrow} \quad a^2 + b^2 - 2ab = a + b \quad (*) \end{aligned}$$

Basierend auf der Gleichung $(*)$ gibt es nun verschiedene Möglichkeiten weiterzuarbeiten:

Variante 1: Nach der zweiten binomischen Formel und wegen $a + b = 2a + (b - a)$ ist:

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)^2 = 2a + (b-a)$$

Mit $d = b - a$ erhält man daraus:

$$2a + d = d^2 \overset{-d}{\Leftrightarrow} 2a = d^2 - d \overset{:2}{\Leftrightarrow} a = \frac{d^2 - d}{2}$$

Damit folgt:

$$b = a + d = \frac{d^2 - d}{2} + d = \frac{d^2 - d + 2d}{2} = \frac{d^2 + d}{2}$$

Wir haben nun also $a = \frac{d^2-d}{2}$ und $b = \frac{d^2+d}{2}$ (mit $d = b - a \in \mathbb{N}$).

Hier setzen wir verschiedene Werte für d ein:

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$a = \frac{d^2-d}{2}$	0	0	1	3	6	10	15	21	28	...
$b = \frac{d^2+d}{2}$	0	1	3	6	10	15	21	28	36	...
	$a+b<2$		alle Möglichkeiten						$a+b>50$	

Variante 2: Wir lösen $(*)$ nach b auf. Es gilt:

$$(*) \Leftrightarrow b^2 - (2a+1)\cdot b + (a^2 - a) = 0 \Leftrightarrow b^2 - (2a+1)\cdot b + \left(\frac{2a+1}{2}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2 - (a^2 - a)}_{=\frac{4a^2+4a+1-4a^2+4a}{4} = \frac{8a+1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left(b - \frac{2a+1}{2}\right)^2 = \frac{8a+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2a+1}{2} + \sqrt{\frac{8a+1}{4}} \ \underline{\text{oder}}\ b = \frac{2a+1}{2} - \sqrt{\frac{8a+1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2} \ \underline{\text{oder}}\ \underbrace{b = \frac{2a+1-\sqrt{8a+1}}{2}}_{\text{fällt wegen } b \geq a \text{ weg}}$$

Also gilt $b = \frac{2a+1+\sqrt{8a+1}}{2}$. Wegen $b \in \mathbb{N}$ muss folglich $u = 8a + 1$ eine ungerade Quadratzahl sein.

Für eine ungerade Quadratzahl u hat man dann $a = \frac{u-1}{8}$ sowie $b = \frac{2a+1+\sqrt{u}}{2}$.

Hier setzen wir verschiedene Werte für u ein:

u	1	9	25	49	81	121	169	225	...
$a = \frac{u-1}{8}$	0	1	3	6	10	15	21	28	...
$b = \frac{2a+1+\sqrt{u}}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	...
	$a+b<2$	alle Möglichkeiten						$a+b>50$	

Aufgabe OS1:

Hier sehen Sie eine Tabelle des kleines Einmaleins:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	17	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Was ist die Summe aller Zahlen in dieser Tabelle?

Lösung: Es ist:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6) = 5\cdot 11 = 55$$

Die Summe der Zahlen in der 1. Zeile ist also 55.

Folglich ist:

die Summe der Zahlen in der 2. Zeile: $2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 2\cdot 55$

die Summe der Zahlen in der 3. Zeile: $3\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 3\cdot 55$

⋮ ⋮

die Summe der Zahlen in der 10. Zeile: $2\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 10\cdot 55$

Die Summe aller vorkommenden Zahlen ist daher:

$$1\cdot 55+2\cdot 55+3\cdot 55+4\cdot 55+5\cdot 55+6\cdot 55+7\cdot 55+8\cdot 55+9\cdot 55+10\cdot 55 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)\cdot 55 = 55^2$$

Das berechnet man am schnellsten mit der binomischen Formel:

$$55^2 = (50+5)^2 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 5 + 5^2 = 2500 + 500 + 25 = 3025$$

Ergebnis: Die Summe aller Zahlen in der Tabelle ist 3025.

Aufgabe OS2:
Bestimmen Sie die vierstellige Zahl $n = abba$ mit den Ziffern $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ (mit $a \neq 0$), die durch 36 aber nicht durch 72 teilbar ist.

Lösung:

Eine Zahl n ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist (da $36 = 4 \cdot 9$ und da 4 und 9 teilerfremd sind).

Dabei ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme von n durch 9 teilbar ist. Die Quersumme von n beträgt hier:

$$Q(n) = a + b + b + a = 2a + 2b = 2(a + b)$$

Da 2 und 9 teilerfremd sind, ist $Q(n) = 2(a + b)$ genau dann durch 9 teilbar, wenn $a + b$ durch 9 teilbar ist. Da $a + b \geq 1 + 0 = 1$ und $a + b \leq 9 + 9 = 18$ kommen nur die Fälle $a + b = 9$ oder $a + b = 18$ in Frage.

Es bestehen also die Möglichkeiten:

$$n \in \{ \underbrace{1881\ ,\ 2772\ ,\ 3663\ ,\ 4554\ ,\ 5445\ ,\ 6336\ ,\ 7227\ ,\ 8118\ ,\ 9009}_{a+b=9}\ ,\ \underbrace{9999}_{a+b=18} \}$$

Weiterhin ist n genau dann durch 4 teilbar, wenn die Zahl, die aus den letzen beiden Ziffern von n gebildet wird, durch 4 teilbar ist. Da $81, 63, 54, 45, 27, 18, 9, 99$ alle nicht durch 4 teilbar sind, bleiben nur die Möglichkeiten:

$$n \in \{ 2772\ ,\ 6336 \}$$

Da die Zahl 6336 sogar durch 8 teilbar ist (da die Zahl 336, die aus den letzten drei Ziffern gebildet wird, durch 8 teilbar ist), ist sie auch durch 72 teilbar (da sie auch durch 9 teilbar ist und da 8 und 9 teilerfremd sind mit $8 \cdot 9 = 72$).

Hingegen ist 2772 nicht durch 8 teilbar, (da die Zahl 772, die aus den letzten drei Ziffern gebildet wird, nicht durch 8 teilbar ist) und somit (wegen $8 \mid 72$) auch nicht durch 72 teilbar.

Die gesuchte Zahl ist also $n = 2772$.

Aufgabe OS3:

In einer Raute (Viereck mit 4 gleich langen Seiten) haben die Diagonalen die Längen $\sqrt{52}$ und $\sqrt{117}$.

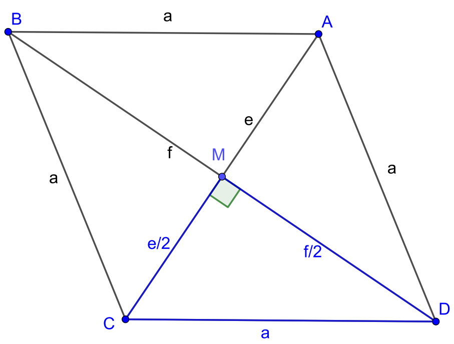
(a) Bestimmen Sie die Seitenlänge der Raute.

(b) Bestimmen Sie die Höhe (=Abstand zweier gegenüberliegender Seiten) der Raute.

Lösung:

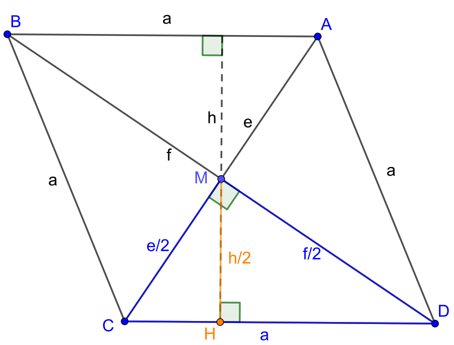
In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

(a) Demzufolge ergibt sich mit den Diagonalenlängen $e = \sqrt{52}$ und $f = \sqrt{117}$ aus dem Satz des Pythagoras (siehe Skizze) für die Seitenlänge a der Raute:



$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{52}^2 + \sqrt{117}^2\right) = \frac{52+117}{4} = \frac{169}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{13}{2} = 6.5$$

(b) Weiterhin ist im rechtwinkligen Dreieck das Produkt aus den beiden Kathetenlängen gleich dem Produkt aus der Länge der Hypothenuse und der der Höhe auf die Hypothenuse. (Beides entspricht dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks. Alternativ kann man dies mit Höhen und Kathetensatz herleiten.) Also (siehe Skizze):



Es ist $|\overline{MH}| = \frac{h}{2}$, da die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle CDM$ kongruent sind.

$$\frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} = a \cdot \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{e \cdot f}{2 \cdot a} = \frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{117}}{2 \cdot \left(\frac{13}{2}\right)} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{13}}{13} = 2 \cdot 3 = 6$$

Aufgabe OS4:

(a) Knut macht ein Puzzle mit $10 \times 20 = 200$ Teilen (d.h. es gibt 10 Reihen mit je 20 Teilen).

Er baut die Teile nacheinander in das Puzzle ein und schreibt für jedes der 200 Teile auf, mit wievielen anderen (bereits eingebauten) Teilen er es verbindet.

Das erste Teil wird mitgezählt, dieses wird mit 0 bereits eingebauten Teilen verbunden. Die weiteren Teile werden mit 1 bis 4 bereits eingebauten Teilen verbunden.

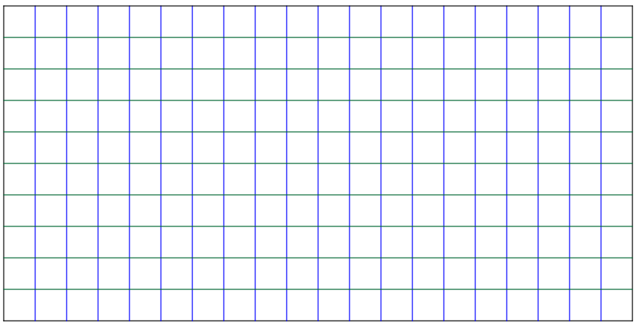
Was ist der Durchschnitt aus den 200 Zahlen, die Knut hierbei erhält ?

(Geben Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch oder als Kommazahl an.)

(b) Verallgemeinern Sie Teil (a) auf ein $m \times n$-Puzzle (mit $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig). Mit wievielen bereits eingebauten Teilen wird ein neues Teil im Durchschnitt (in Abhängigkeit von m und n) verbunden?

Lösung:

(a) Die Anzahl der "Verbindungsstellen" im gesamten Puzzle beträgt:



$$\underbrace{19 \cdot 10}_{\text{im Bild blau}} + \underbrace{9 \cdot 20}_{\text{im Bild grün}} = 190 + 180 = 370$$

Demzufolge wird jedes Teil im Durchschnitt mit

$$\frac{370}{200} = \frac{37}{20} = 1,85$$

bereits eingebauten Teilen verbunden.

(b) Die Anzahl der "Verbindungsstellen" im gesamten Puzzle beträgt nun:

$$(n-1) \cdot m + (m-1) \cdot n = 2mn - m - n$$

Demzufolge wird jedes Teil im Durchschnitt mit

$$\frac{2nm - m - n}{m \cdot n} = 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

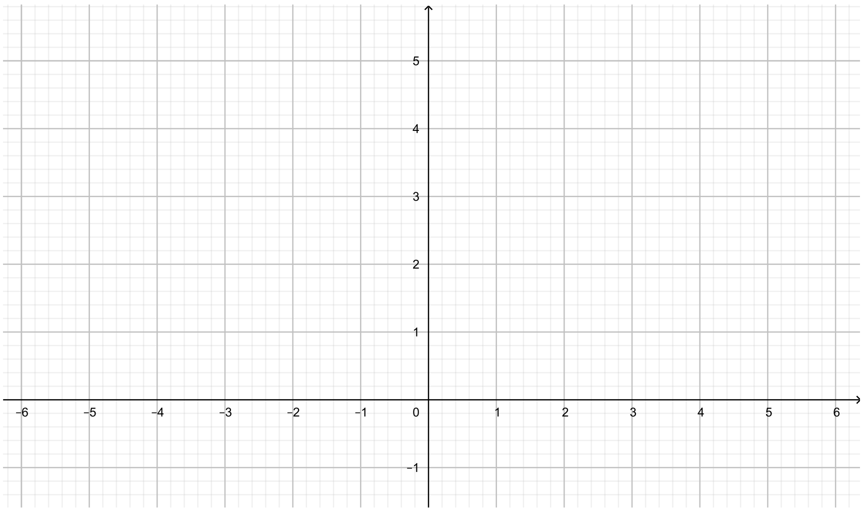
bereits eingebauten Teilen verbunden.

Aufgabe OS5:

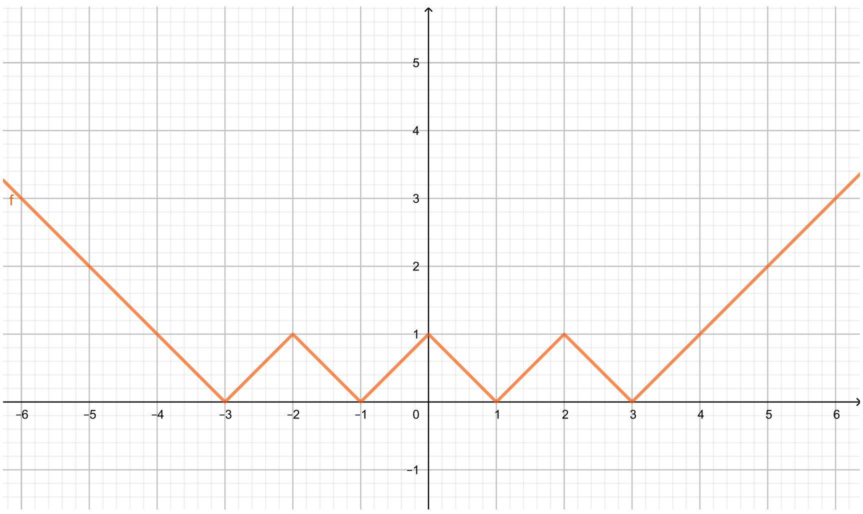
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \Big|\ \Big|\ \big|\ |x| - 1\ \big| - 1\ \Big| - 1\ \Big|$$

(Dabei bezeichnet $|x|$ den Betrag einer reellen Zahl x.)

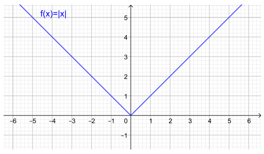


Lösung:

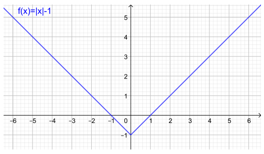


möglicher Lösungsweg:

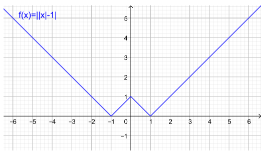
1.) Beginne mit der Betragsfunktion



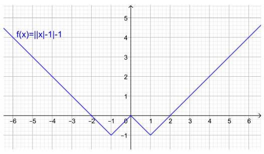
2.) Verschiebe um 1 nach unten



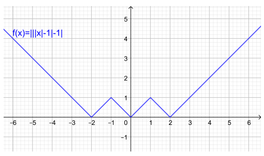
3.) Spiegle die Teile des Graphen unterhalb der x-Achse nach oben



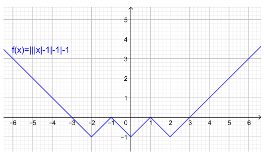
4.) Verschiebe um 1 nach unten



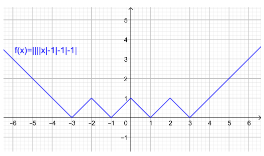
5.) Spiegle die Teile des Graphen unterhalb der x-Achse nach oben



6.) Verschiebe um 1 nach unten



7.) Spiegle die Teile des Graphen unterhalb der x-Achse nach oben



Aufgabe OS6:

Anna, Bert und Christian haben jeder einen 6-seitigen Würfel. Sie beschriften nun diese drei Würfel mit den Zahlen $1, \ldots, 18$ (jeweils eine Zahl auf jede Seite jedes Würfels, alle 18 Zahlen müssen verwendet werden). Anschließend würfeln alle drei gleichzeitig mit ihrem jeweiligen Würfel.

Dabei sollen die Wahrscheinlichkeiten, dass Anna bzw. Bert bzw. Christian die größte der drei Zahlen würfelt genau gleich (also $\frac{1}{3}$) sein.

Geben Sie eine Möglichkeit für die Verteilung der Zahlen an.

	Zahlen					
Annas Würfel						
Berts Würfel						
Christians Würfel						

Lösung:

	Zahlen					
Annas Würfel	1	2	3	4	17	18
Berts Würfel	5	6	7	14	15	16
Christians Würfel	8	9	10	11	12	13

Es gibt viele Lösungsmöglichkeiten.

Aufgabe OS7:

Gegeben seien zwei Punkte A, B in der Ebene. Ausgehend von der Strecke $\overline{AB}$ konstruiert man:

- ein regelmäßiges n-Eck mit den Eckpunkten $A, B, X_3, \ldots, X_n$
- ein regelmäßiges m-Eck mit den Eckpunkten $A, B, Y_3, \ldots, Y_m$

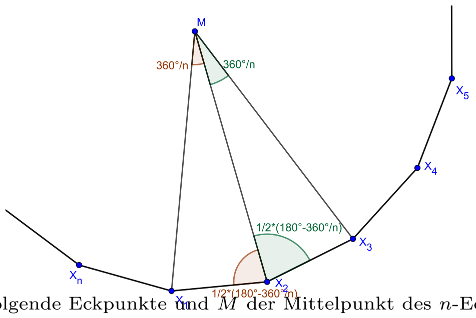
Diese beiden Vielecke liegen dabei auf unterschiedlichen Seiten der Geraden AB.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für n und m mit $3 \le n \le m$, so dass die Strecken $\overline{BX_3}$ und $\overline{BY_3}$ senkrecht aufeinander stehen.

Lösung:

Der Innenwinkel in einem regelmäßigen n-Eck beträgt $180° - \frac{360°}{n}$.

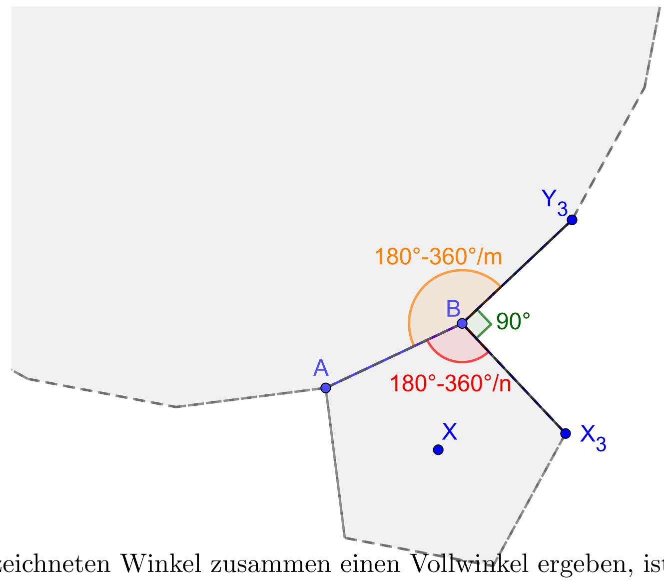
Begründung hierzu:



Sind X_1, X_2, X_3 zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte und M der Mittelpunkt des n-Ecks, so gilt $\angle X_1MX_2 = \angle X_2MX_3 = \frac{360°}{n}$. Zudem sind die Dreiecke $\triangle MX_1X_2$ und MX_2X_3 gleichschenklig und somit folgt (Winkelsumme im Dreieck):

$$\angle X_1X_2M = \angle X_3X_2M = \frac{180° - \left(\frac{360°}{n}\right)}{2} \quad \text{und folglich} \quad \angle X_1X_2X_3 = \angle X_1X_2M + \angle X_3X_2M = 2 \cdot \left(\frac{180° - \left(\frac{360°}{n}\right)}{2}\right) = 180° - \frac{360°}{n}$$

Daher ensteht folgendes Bild, wenn die Strecken $\overline{BX_3}$ und $\overline{BY_3}$ senkrecht aufeinander stehen:



Da die drei eingezeichneten Winkel zusammen einen Vollwinkel ergeben, ist dies äquivalent zu:

$$180° - \frac{360°}{n} + 180° - \frac{360°}{m} + 90° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 90° = \frac{360°}{n} + \frac{360°}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

Wir suchen also nun die Lösungen (in Form von Paaren (n, m)) von

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \quad (*)$$

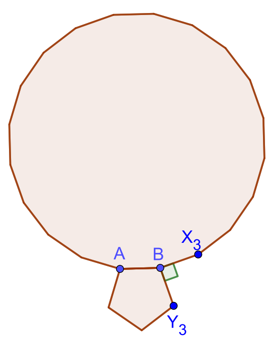
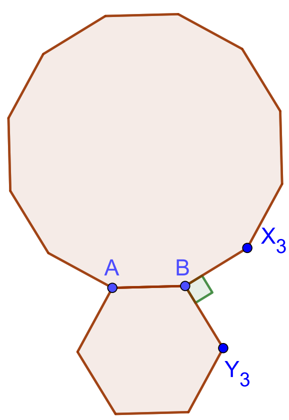
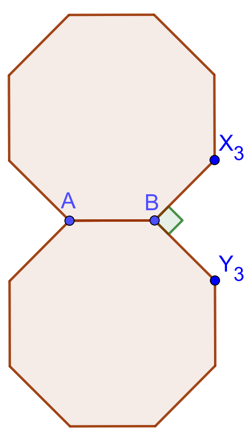
mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $3 \leq n \leq m$.

- Im Fall $n \leq 4$ ist $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$. Somit hat $(*)$ keine Lösungen mit $n \leq 4$.
- Im Fall $n \geq 9$ ist auch $m \geq 9$ und damit $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{9} + \frac{1}{9} < \frac{1}{4}$. Somit hat $(*)$ keine Lösungen mit $n \geq 9$ (und $m \geq n$).

Es bleiben die Fälle $n \in \{5, 6, 7, 8\}$:

- Für $n = 5$ ergibt sich:
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \quad \Leftrightarrow \quad m = 20$$
Eine Möglichkeit ist also $n = 5$ und $m = 20$.
- Für $n = 6$ ergibt sich:
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \quad \Leftrightarrow \quad m = 12$$
Eine Möglichkeit ist also $n = 6$ und $m = 12$.
- Für $n = 7$ ergibt sich:
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{3}{28} \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{28}{3} \notin \mathbb{N}$$
Mit $n = 7$ hat $(*)$ also keine Lösung mit ganzzahligem m.
- Für $n = 8$ ergibt sich:
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad m = 8$$
Eine Möglichkeit ist also $n = 8$ und $m = 8$.

Alle Lösungen sind also: $\quad (n, m) \in \{\ (5, 20)\ ,\ (6, 12)\ ,\ (8, 8)\ \}$

$n = 5$ und $m = 20$	$n = 6$ und $m = 12$	$n = m = 8$
		

Aufgabe OS8:

Gegeben ist eine natürliche Zahl n mit mindestens 3 Stellen (im Dezimalsystem). Sei m die Zahl, die entsteht, wenn man aus n die letzten beiden Ziffern wegstreicht.

(a) Bestimmen Sie die größtmögliche Zahl n, für die $\frac{n}{m} = 107$ gilt.

(b) Was ist der kleinstmögliche Wert für $\frac{n}{m}$? Geben Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, für die $\frac{n}{m}$ minimal wird.

(c) Was ist der größtmögliche Wert für $\frac{n}{m}$? Geben Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, für die $\frac{n}{m}$ maximal wird.

Lösung:

Die Zahl n kann in der Form $n = 100 \cdot a + b$ mit $a \in \mathbb{N}^*$ und $b \in \{0, \dots, 99\}$ geschrieben werden. Damit ergibt sich die Zahl m, die entsteht, wenn man aus n die letzten beiden Ziffern wegstreicht, als $m = a$. Also ist:

$$\frac{n}{m} = \frac{100 \cdot a + b}{a} = 100 + \frac{b}{a}$$

(a) Es gilt:

$$\frac{n}{m} = 107 \quad \Leftrightarrow \quad 100 + \frac{b}{a} = 107 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad b = 7 \cdot a$$

Die größtmögliche Zahl n mit $\frac{n}{m} = 107$ erhält man somit, indem man für b das größte Vielfache von 7 mit $b \leq 99$ wählt. Also hat man $b = 98$ und folglich $a = \frac{98}{7} = 14$.

Die größtmögliche Zahl n mit $\frac{n}{m} = 107$ ist somit: $\quad n = 1498$

(b) Es ist stets (wegen $a > 0$ und $b \geq 0$):

$$\frac{n}{m} = 100 + \frac{b}{a} \geq 100 \geq 100 + \frac{0}{a} = 100$$

Der kleinstmögliche Wert von $\frac{n}{m}$ ist somit 100. Die Zahlen n mit $\frac{n}{m} = 100$ sind (genau) die Vielfachen von 100 (dann ist $b = 0$), also $n \in \{100, 200, 300, \dots\}$.

(c) Es ist stets (wegen $a \geq 1$ und $b \geq 99$):

$$\frac{n}{m} = 100 + \frac{b}{a} \geq 100 \leq 100 + \frac{99}{1} = 199$$

Der kleinstmögliche Wert von $\frac{n}{m}$ ist somit 199. Die (einzige) Zahl n mit $\frac{n}{m} = 199$ ist $n = 199$ (dann ist $a = 1$ und $b = 99$).