Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

mit Lösungen

Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

Aufgabe OG1:

Anna, Bert und Christian laufen Runden auf einer Laufbahn. Anna und Bert laufen im Uhrzeigersinn, Christian läuft gegen den Uhrzeigersinn. Alle drei starten am selben Punkt und laufen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit.

- 75 Sekunden nach dem Start begegnen sich Anna und Christian erstmals.
- 84 Sekunden nach dem Start begegnen sich Bert und Christian erstmals.
- Anna überholt erstmals Bert, nachdem sie genau 3.5 Runden gelaufen ist.

(a) Wie lange benötigt jeder der drei für eine Runde?

(b) Nach welcher Zeit (ab dem Start) treffen erstmal alle drei am selben Punkt aufeinander?

(c) Nach welcher Zeit (ab dem Start) treffen erstmal alle drei am Startpunkt wieder aufeinander?

Lösung OG1:

(a) Seien t_A, t_B, t_C die Zeiten die Anna, Bert bzw. Christian für eine Runde brauchen und ℓ die Länge einer Runde. Dann laufen Anna, Bert bzw. Christian mit den Geschwindigkeiten:

$$v_A = \frac{\ell}{t_A} \quad , \quad v_B = \frac{\ell}{t_B} \quad , \quad v_C = \frac{\ell}{t_C}$$

- $\boxed{\text{Nach 75 Sekunden begegnen sich Anna und Christian erstmals.}}$

  Anna hat die Strecke $v_A \cdot 75\text{s} = \frac{\ell \cdot 75\text{s}}{t_A}$ zurückgelegt.
  Christian hat die Strecke $v_C \cdot 75\text{s} = \frac{\ell \cdot 75\text{s}}{t_C}$ zurückgelegt.

  Zusammen haben sie genau eine Runde, also die Strecke ℓ zurückgelegt.

  Also gilt:

  $$\frac{\ell \cdot 75\text{s}}{t_A} + \frac{\ell \cdot 75\text{s}}{t_C} = \ell \quad \overset{:(\ell \cdot 75\text{s})}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_C} = \frac{1}{75\text{s}} \quad (1)$$

- $\boxed{\text{Nach 84 Sekunden begegnen sich Bert und Christian erstmals.}}$

  Bert hat die Strecke $v_B \cdot 84\text{s} = \frac{\ell \cdot 84\text{s}}{t_B}$ zurückgelegt.
  Christian hat die Strecke $v_C \cdot 84\text{s} = \frac{\ell \cdot 84\text{s}}{t_C}$ zurückgelegt.

  Zusammen haben sie genau eine Runde, also die Strecke ℓ zurückgelegt.

  Also gilt:

  $$\frac{\ell \cdot 84\text{s}}{t_B} + \frac{\ell \cdot 84\text{s}}{t_C} = \ell \quad \overset{:(\ell \cdot 84\text{s})}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{t_B} + \frac{1}{t_C} = \frac{1}{84\text{s}} \quad (2)$$

- $\boxed{\text{Anna überholt erstmals Bert, nachdem sie genau 3.5 Runden gelaufen ist.}}$

  Anna braucht für 3.5 Runden die Zeit $3.5 \cdot t_A$.
  Bert braucht für 2.5 Runden die Zeit $2.5 \cdot t_B$.

  Diese beiden Zeiten sind gleich.

  Also gilt:

  $$3.5 \cdot t_A = 2.5 \cdot t_B \quad \overset{:3.5}{\Leftrightarrow} \quad t_A = \frac{2.5}{3.5} \cdot t_B \quad \Leftrightarrow \quad t_A = \frac{5}{7} \cdot t_B \quad (3)$$

Durch Subtraktion der ersten beiden Gleichungen (1)-(2) erhält man:

$$\left(\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_C}\right) - \left(\frac{1}{t_B} + \frac{1}{t_C}\right) = \frac{1}{75\text{s}} - \frac{1}{84\text{s}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{t_A} - \frac{1}{t_B} = \frac{84\text{s} - 75\text{s}}{75\text{s} \cdot 84\text{s}} = \frac{9}{75 \cdot 84 \text{ s}}$$

Setzt man hier (3) ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\left(\frac{5}{7} \cdot t_B\right)} - \frac{1}{t_B} = \frac{9}{75 \cdot 84 \text{ s}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{7}{5} - 1\right) \cdot \frac{1}{t_B} = \frac{9}{75 \cdot 84 \text{ s}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{t_B} = \frac{9}{75 \cdot 84 \text{ s}}$$

$$\overset{\cdot\frac{5}{2}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{t_B} = \frac{5 \cdot 9}{2 \cdot 75 \cdot 84 \text{ s}} \quad \overset{\text{Kehrwert}}{\Leftrightarrow} \quad t_B = \frac{2 \cdot 75 \cdot 84 \text{ s}}{5 \cdot 9} = 2 \cdot 5 \cdot 28\text{s} = 280\text{s}$$

Nun folgt durch Einsetzen in (3): $\quad t_A = \frac{5}{7} \cdot t_B = \frac{5}{7} \cdot 280\text{s} = 200\text{s}$

Schließlich setzen wir dies in (1) ein und erhalten:

$$\frac{1}{200\text{s}} + \frac{1}{t_C} = \frac{1}{75\text{s}} \overset{-\frac{1}{200\text{s}}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{t_C} = \underbrace{\frac{1}{75\text{s}} - \frac{1}{200\text{s}}}_{=\frac{8-3}{600\text{s}}=\frac{5}{600\text{s}}=\frac{1}{120\text{s}}} \overset{\text{Kehrwert}}{\Leftrightarrow} t_C = 120\text{s}$$

Für eine Runde benötigt Anna 200 Sekunden, Bert 280 Sekunden und Christian 120 Sekunden.

(b) Die Zeit bis Anna und Bert erstmals aufeinandertreffen (d.h. Bert wird von Anna überholt) beträgt (beachte, dass Anna dann 3.5 Runden bzw. dass Bert 2.5 Runden gelaufen ist):

$$3.5 \cdot t_A = \frac{7}{2} \cdot 200\text{s} = 700\text{s} \quad \text{bzw.} \quad 2.5 \cdot t_B = \frac{5}{2} \cdot 280\text{s} = 700\text{s}$$

Es gilt also:

- Anna und Bert treffen alle 700 Sekunden aufeinander.
- Anna und Christian treffen alle 75 Sekunden aufeinander.
- Bert und Christian treffen alle 84 Sekunden aufeinander.

Es treffen also alle drei am selben Punkt aufeinander, wenn die Zeit ein Vielfaches von 700 Sekunden, 75 Sekunden und 84 Sekunden ist. Zum ersten Mal geschieht dies nach:

$$\text{kgV}(700\text{s}, 75\text{s}, 84\text{s}) = \text{kgV}(700, 75, 84)\ \text{s} \overset{\text{(s.u.)}}{=} 2100\text{s}$$

Mit den Primfaktorzerlegungen erhält man dabei das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache:

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & 700 & = & 2^2 & & & \cdot & 5^2 & \cdot & 7^1 & & \\ & 75 & = & & & 3^1 & \cdot & 5^2 & & & & \\ & 84 & = & 2^2 & \cdot & 3^1 & & & \cdot & 7^1 & & \\ \hline \Rightarrow & \text{kgV}(700,75,84) & = & 2^2 & \cdot & 3^1 & \cdot & 5^2 & \cdot & 7^1 & = & 2100 \end{array}$$

Erstmal treffen also alle drei genau 2100 Sekunden (bzw. 35 Minuten) nach dem Start aufeinander.

(c) Beim ersten Aufeinandertreffen von allen drei nach 2100s (siehe (b)) überholt Anna Bert zum dritten Mal. (Anna überholt Bert immer nach 700s, siehe (b)). Da Anna Bert jedoch immer nach 3.5 gelaufenen Runden überholt, befinden sie sich zu diesem Zeitpunkt (beachte, dass die Anzahl der Überholungen ungerade ist) genau in der Mitte der Bahn.

Nach weiteren 2100s treffen alle zum zweiten Mal gemeinsam aufeinander und befinden sich dann genau am Startpunkt.

Also treffen alle drei erstmals nach $2 \cdot 2100\text{s} = 4200\text{s}$ (bzw. 70 Minuten) am Startpunkt wieder aufeinander.

Alternativ: Nach (a) gilt:
Für eine Runde benötigt Anna 200 Sekunden, Bert 280 Sekunden und Christian 120 Sekunden.

Es treffen also alle drei am Startpunkt aufeinander, wenn die Zeit ein Vielfaches von 200 Sekunden, 280 Sekunden und 120 Sekunden ist. Zum ersten Mal geschieht dies nach:

$$\text{kgV}(200\text{s}, 280\text{s}, 120\text{s}) = \text{kgV}(200, 280, 120)\ \text{s} \overset{\text{(s.u.)}}{=} 4200\text{s}$$

Mit den Primfaktorzerlegungen erhält man dabei das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache:

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
200 & = & 2^3 & & & \cdot & 5^2 & & & & \\
280 & = & 2^3 & & & \cdot & 5^1 & \cdot & 7^1 & & \\
120 & = & 2^3 & \cdot & 3^1 & \cdot & 5^1 & & & & \\
\hline
\Rightarrow \quad \mathrm{kgV}(200, 280, 120) & = & 2^3 & \cdot & 3^1 & \cdot & 5^2 & \cdot & 7^1 & = & 4200
\end{array}
$$

Also treffen alle drei erstmals nach 4200 Sekunden (bzw. 70 Minuten) am Startpunkt wieder aufeinander.

Aufgabe OG2:

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Kombinationen von Ziffern A, B aus $1, \ldots, 9$, so dass für die zweistellige Zahl AB und die dreistellige Zahl BAA mit den Ziffern A und B gilt:

$$8 \cdot AB = BAA$$

(b) Bestimmen Sie alle möglichen Kombinationen von Ziffern A, B aus $1, \ldots, 9$, so dass für die zweistellige Zahl AB und die vierstellige Zahl $BAAB$ mit den Ziffern A und B gilt:

$$77 \cdot AB = BAAB$$

(c) Bestimmen Sie alle möglichen Kombinationen von Ziffern A aus $1, \ldots, 9$ und B, C aus $0, \ldots, 9$, so dass für die dreistellige Zahl ABC und die fünfstellige Zahl $AAABC$ mit den Ziffern A und B gilt:

$$89 \cdot ABC = AAABC$$

Lösung OG2:

(a) Es gilt: $AB = 10 \cdot A + B$ und $BAA = 100 \cdot B + 10 \cdot A + A = 100 \cdot B + 11 \cdot A$

Also:

$$\begin{aligned} 8 \cdot AB = BAA \quad &\Leftrightarrow \quad 8 \cdot (10 \cdot A + B) = 100 \cdot B + 11 \cdot A \\ &\Leftrightarrow \quad 80 \cdot A + 8 \cdot B = 100 \cdot B + 11 \cdot A \\ &\overset{-11A-8B}{\Leftrightarrow} \quad 69 \cdot A = 92 \cdot B \\ &\overset{:23}{\Leftrightarrow} \quad 3 \cdot A = 4 \cdot B \end{aligned}$$

Damit muss A durch 4 teilbar sein ($3 \cdot A = 4 \cdot B$ ist durch 4 teilbar und die Zahlen 3 und 4 sind teilerfremd), daher muss (wegen $A \in \{1, \ldots, 9\}$) $A = 4$ oder $A = 8$ gelten.

Mit $3 \cdot A = 4 \cdot B$ folgt: Für $A = 4$ ist $B = 3$. Für $A = 8$ ist $B = 6$.

Also sind $AB = 43$ oder $AB = 86$ die beiden einzigen Möglichkeiten.

(b) Es gilt: $AB = 10 \cdot A + B$ und $BAAB = 1000 \cdot B + 100 \cdot A + 10 \cdot A + B = 1001 \cdot B + 110 \cdot A$

Also:

$$\begin{aligned} 77 \cdot AB = BAAB \quad &\Leftrightarrow \quad 77 \cdot (10 \cdot A + B) = 1001 \cdot B + 110 \cdot A \\ &\Leftrightarrow \quad 770 \cdot A + 77 \cdot B = 1001 \cdot B + 110 \cdot A \\ &\overset{-110A-77B}{\Leftrightarrow} \quad 660 \cdot A = 924 \cdot B \\ &\overset{:132}{\Leftrightarrow} \quad 5 \cdot A = 7 \cdot B \end{aligned}$$

Damit muss A durch 7 teilbar sein ($5 \cdot A = 7 \cdot B$ ist durch 7 teilbar und die Zahlen 5 und 7 sind teilerfremd), daher muss (wegen $A \in \{1, \ldots, 9\}$) $A = 7$ gelten.

Mit $5 \cdot A = 7 \cdot B$ folgt: Für $A = 7$ ist $B = 5$.

Also ist $AB = 75$ die einzige Möglichkeit.

(c) Es gilt: $ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$
und $AAABC = 10000 \cdot A + 1000 \cdot A + 100 \cdot A + 10 \cdot B + C = 11100 \cdot A + 10 \cdot B + C$

Also:

$$\begin{aligned} 89 \cdot ABC = AABBC \quad &\Leftrightarrow \quad 89 \cdot (100 \cdot A + 10 \cdot B + C) = 11100 \cdot A + 10 \cdot B + C \\ &\Leftrightarrow \quad 8900 \cdot A + 890 \cdot B + 89 \cdot C = 11100 \cdot A + 10 \cdot B + C \\ &\overset{-8900A-10B-C}{\Leftrightarrow} \quad 880 \cdot B + 88 \cdot C = 2200 \cdot A \\ &\overset{:88}{\Leftrightarrow} \quad 10 \cdot B + C = 25 \cdot A \end{aligned}$$

Damit muss C durch 5 teilbar sein ($C = 25A - 10B = 5 \cdot (5A - 2B)$), daher muss (wegen $C \in \{0, \ldots, 9\}$) $C = 0$ oder $C = 5$ gelten.

- Im Fall $C = 0$ ergibt sich: $10 \cdot B + C = 25 \cdot A \overset{:5}{\Leftrightarrow} 2 \cdot B = 5 \cdot A$

  Damit muss A gerade sein (da 5 ungerade und $5A = 2B$ gerade). Für $A = 2$ ergibt sich $B = 5$. Für $A \geq 4$ müsste $B \geq 10$ sein, was ausgeschlossen ist ($B \in \{1, \ldots, 9\}$).

- Im Fall $C = 5$ ergibt sich: $10 \cdot B + 5 = 25 \cdot A \overset{:5}{\Leftrightarrow} 2 \cdot B + 1 = 5 \cdot A$

  Damit muss A ungerade sein (da $5A = 2B + 1$ ungerade). Für $A = 1$ ergibt sich $B = 2$. Für $A = 3$ ergibt sich $B = 7$. Für $A \geq 5$ müsste $B \geq 12$ sein, was ausgeschlossen ist ($B \in \{1, \ldots, 9\}$).

Also sind $AB = 125$ oder $AB = 250$ oder $AB = 375$ die einzigen Möglichkeiten.

Aufgabe OG3:

Wir betrachten den Graphen der Funktion (Hyperbel):

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

(a) Die beiden Endpunkte einer Strecke liegen auf dem Graphen von f. Die Strecke verläuft durch den Nullpunkt $O = (0,0)$ und hat die Länge $\sqrt{17}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Endpunkte der Strecke (Es gibt zwei mögliche Ergebnisse.)

(b) Die vier Endpunkte der beiden möglichen Strecken aus (a) bilden ein Viereck.

Um was für ein Viereck handelt es sich dabei? (Nennen Sie einen möglichst speziellen Begriff.)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Lösung OG3:

(a) Da die beiden Endpunkte A, B der gesuchten Strecke auf dem Graphen der Funktion f liegen, haben Sie Koordinaten der Form $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die drei Punkte A, B, O liegen auf einer Geraden, diese Gerade hat die Steigung

$$\begin{array}{rcll} & \frac{\left(\frac{1}{a}-0\right)}{a-0} & = & \frac{1}{a^2} \quad \text{Gerade läuft durch } A \text{ und } O \\ \text{bzw.} & \frac{\left(\frac{1}{b}-0\right)}{b-0} & = & \frac{1}{b^2} \quad \text{Gerade läuft durch } B \text{ und } O \end{array}$$

Also folgt:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} \overset{\text{Kehrwert}}{\Leftrightarrow} a^2 = b^2 \Leftrightarrow \underbrace{a = b}_{\text{nicht möglich, da } A \neq B} \quad \underline{\text{oder}} \quad -a = b$$

Also ist $b = -a$ und die Endpunkte der gesuchten Strecke sind somit von der Form $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ und $B = \left(-a, \frac{1}{-a}\right) = \left(-a, \frac{-1}{a}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. (Wir können davon ausgehen, dass a positiv ist, da man im Fall $a < 0$ einfach die Bezeichungen der Punkte A und B tauschen kann.)

Daraus berechnet sich die Länge der Strecke in Abhängigkeit von a als:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(a-(-a))^2 + \left(\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{a}\right)\right)^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = 2 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$$

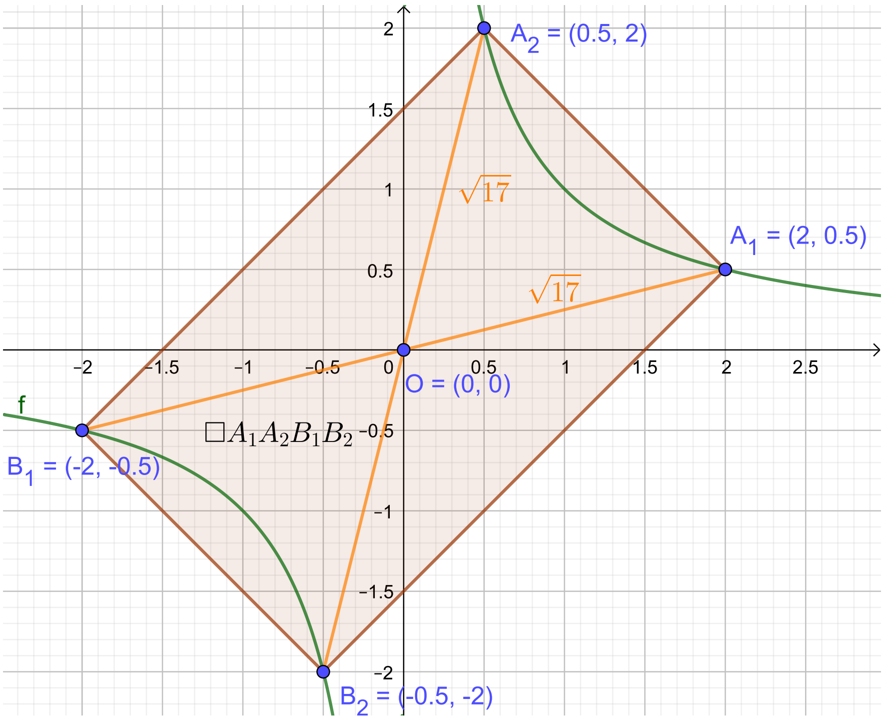
Also gilt (nach Voraussetzung hat die gesuchte Strecke die Länge $\sqrt{17}$):

$$\begin{array}{rcl} \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{17} & \Leftrightarrow & 2 \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{17} \\ & \overset{:2}{\Leftrightarrow} & \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \\ & \overset{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow} & a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{17}{4} \\ & \overset{\cdot a^2}{\Leftrightarrow} & a^4 + 1 = \frac{17}{4} \cdot a^2 \\ & \overset{-\frac{17}{4}\cdot a^2 + \left(\frac{17}{8}\right)^2 - 1}{\Leftrightarrow} & a^4 - \frac{17}{4} \cdot a^2 + \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \left(\frac{17}{8}\right)^2 - 1 \\ & \overset{\text{binomische Formel}}{\Leftrightarrow} & \left(a^2 - \frac{17}{8}\right)^2 = \frac{289-64}{64} = \frac{225}{64} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \\ & \overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftrightarrow} & a^2 - \frac{17}{8} = \frac{15}{8} \quad \underline{\text{oder}} \quad a^2 - \frac{17}{8} = -\frac{15}{8} \\ & \overset{+\frac{17}{8}}{\Leftrightarrow} & a^2 = \frac{32}{8} = 4 \quad \underline{\text{oder}} \quad a^2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ & \overset{\sqrt{\cdot}\ (a>0)}{\Leftrightarrow} & a = \sqrt{4} = 2 \quad \underline{\text{oder}} \quad a = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Also ergeben sich Sie die Koordinaten der Endpunkte der Strecke:

- im Fall $a = 2$ als $A_1 = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ und $B_1 = \left(-2, \frac{-1}{2}\right)$
- im Fall $a = \frac{1}{2}$ als $A_2 = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ und $B_2 = \left(\frac{-1}{2}, -2\right)$

(b)



Gesucht ist der Flächeninhalt von $\square A_1A_2B_1B_2$. Für die Seitenlängen dieses Vierecks gilt:

$$\begin{array}{llllll} & |\overline{A_1A_2}| & = & \sqrt{(2-0.5)^2+(0.5-2)^2} & = \sqrt{2\cdot 1.5^2} & = \sqrt{2}\cdot 1.5 \\ \text{und auch} & |\overline{B_1B_2}| & = & \sqrt{(-2-(-0.5))^2+(-0.5-(-2))^2} & = \sqrt{2\cdot 1.5^2} & = \sqrt{2}\cdot 1.5 \\ \text{sowie} & |\overline{A_2B_1}| & = & \sqrt{(0.5-(-2))^2+(2-(-0.5))^2} & = \sqrt{2\cdot 2.5^2} & = \sqrt{2}\cdot 2.5 \\ \text{und auch} & |\overline{A_1B_2}| & = & \sqrt{(2-(-0.5))^2+(0.5-(-2))^2} & = \sqrt{2\cdot 2.5^2} & = \sqrt{2}\cdot 2.5 \end{array}$$

Es handelt sich bei $\square A_1A_2B_1B_2$ um ein Rechteck, was man auf verschiedene Weisen begründen kann (siehe unten). Wir begründen jeweils nur, dass das Viereck einen rechten Winkel bei A_2 hat. Für die übrigen Winkel kann man analog argumentieren oder nutzen, dass man bereits weiß, dass $\square A_1A_2B_1B_2$ ein Parallelogramm ist (gegenüberliegende Seiten sind gleichlang, siehe oben) und dass ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel stets ein Rechteck ist.

Begründung 1:

Die Steigung der Geraden A_1A_2 beträgt: $\frac{0.5-2}{2-0.5} = \frac{-1.5}{1.5} = -1$

Die Steigung der Geraden A_2B_1 beträgt: $\frac{2-(-0.5)}{0.5-(-2)} = \frac{2.5}{2.5} = 1$

Da das Produkt der Steigungen also $(-1)\cdot 1 = -1$ ist, schneiden sich die beiden Geraden senkrecht. Somit hat $\square A_1A_2B_1B_2$ einen rechten Winkel bei A_2.

Begründung 2:

Es gilt:

$$|\overline{A_1A_2}|^2+|\overline{A_2B_1}|^2 \overset{\text{(s.o.)}}{=} \left(\sqrt{2}\cdot 1.5\right)^2+\left(\sqrt{2}\cdot 2.5\right)^2 = 2\cdot\left(1.5^2+2.5^2\right) = 2\cdot(2.25+6.25) = 2\cdot 8.5 = 17 \overset{\text{(a)}}{=} |\overline{A_1B_1}|^2$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Pytagoras hat somit das Dreieck $\triangle A_1A_2B_1$ (und somit auch $\square A_1A_2B_1B_2$) einen rechten Winkel bei A_2.

Begründung 3:

Aus Symmetriegründen (kann man auch nachrechnen) gilt: $\left|\overline{OA_1}\right| = \left|\overline{OA_2}\right| = \left|\overline{OB_1}\right| \left(= \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$
Damit ist O der Mittelpunkt der Strecke A_1B_1 (diese Strecke verläuft nach (a) durch O) und A_2 liegt auf dem Thaleskreis mit Durchmesser A_1B_1. Somit das Dreieck $\triangle A_1A_2B_1$ (und somit auch $\square A_1A_2B_1B_2$) einen rechten Winkel bei A_2

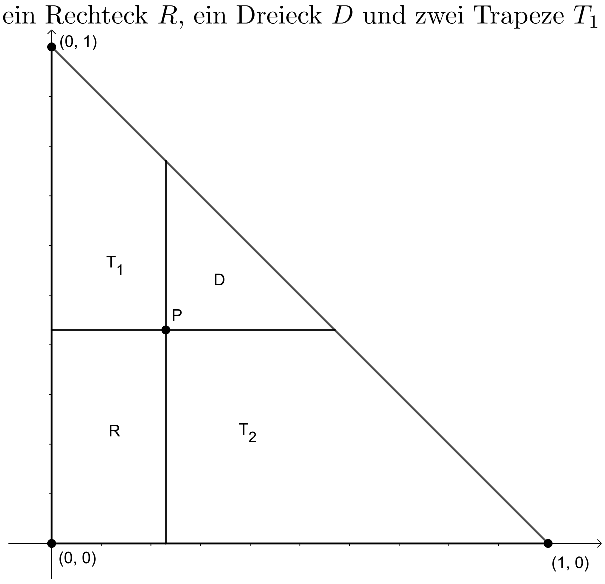
Da man nun weiß, dass $\square A_1A_2B_1B_2$ ein Rechteck ist, ergibt sich der Flächeninhalt als Produkt der Seitenlangen, also:

$$F\left(\square A_1A_2B_1B_2\right) = \left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_2B_1}\right| = \sqrt{2} \cdot 1.5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2.5 = 2 \cdot 2.5 \cdot 1.5 \cdot = 7.5$$

Aufgabe OG4:

Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$.

Nun wird ein Punkt P im Inneren dieses Dreiecks gewählt. Durch die durch den Punkt P verlaufenden Parallelen zu x-Achse und y-Achse wird das Dreieck $\triangle ABC$ in vier Teilflächen zerlegt. Es handelt sich dabei um ein Rechteck R, ein Dreieck D und zwei Trapeze T_1 und T_2 (siehe Grafik):



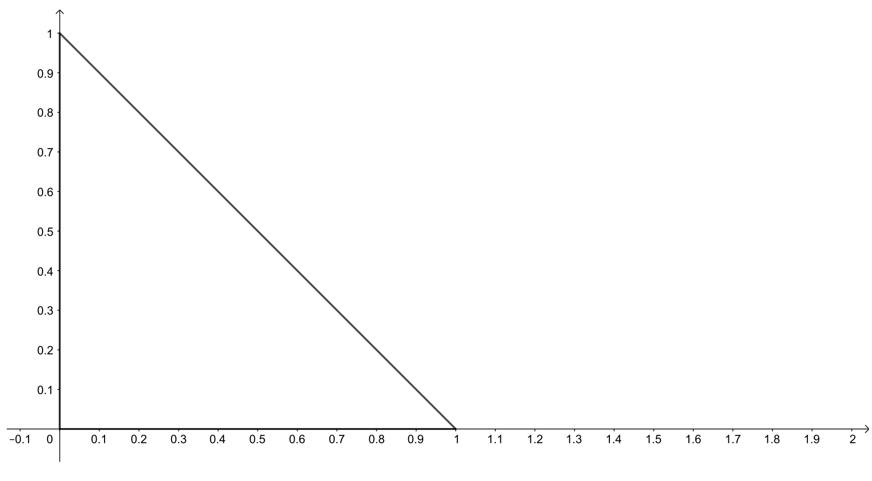
Anmerkung: Die gesuchten Punktmengen sind als geometrische Objekte eindeutig zu beschreiben.

(a) Bestimmen Sie die Punktmenge, in der P liegen kann, so dass T_1 und T_2 den gleichen Flächeninhalt haben. Zeichnen Sie diese Punktmenge in die Grafik unten ein.

(b) Bestimmen Sie die Punktmenge, in der P liegen kann, so dass T_1 und R den gleichen Flächeninhalt haben. Zeichnen Sie diese Punktmenge in die Grafik unten ein.

(c) Bestimmen Sie P so, dass T_1, T_2 und R den gleichen Flächeninhalt haben.

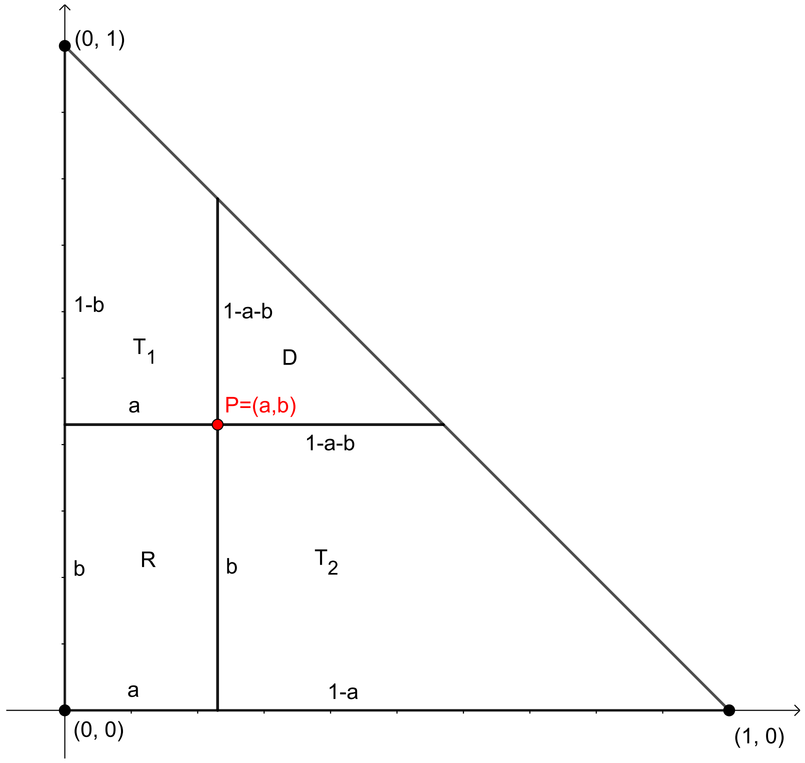
(d) Bestimmen Sie die Punktmenge, in der P liegen kann, so dass D und R den gleichen Flächeninhalt haben. Zeichnen Sie diese Punktmenge in die Grafik unten ein.



Lösung OG4:

Wir betrachten einen Punkt P mit den Koordinaten $P = (a, b)$. Dieser Punkt liegt genau dann im Inneren des Dreiecks, wenn $a > 0$ und $b > 0$ und $a + b < 1$ ist.

Wir bestimmen zunächst die Flächeninhalte von R und D sowie von T_1 und T_2 in Abhängigkeit von a und b. Es gilt:



- R ist ein Rechteck mit Seitenlängen a und b. Also gilt:

$$F(R) = a \cdot b$$

- T_1 ist ein Trapez mit Höhe a und parallelen Seiten der Längen $1 - b$ und $1 - a - b$. Also gilt:

$$F(T_1) = a \cdot \frac{(1-b) + (1-a-b)}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2 - a - 2b)$$

- T_2 ist ein Trapez mit Höhe b und parallelen Seiten der Längen $1 - a$ und $1 - a - b$. Also gilt:

$$F(T_2) = b \cdot \frac{(1-a) + (1-a-b)}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (2 - 2a - b)$$

- D ist ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck mit Kathetenlängen $1 - a - b$ Also gilt:

$$F(D) = \frac{1}{2} \cdot (1 - a - b)^2$$

(a) Es gilt die Äquivalenz:

$$\begin{aligned}
F(T_1) = F(T_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2 - a - 2b) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (2 - 2a - b) \\
&\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \quad 2a - a^2 - 2ab = 2b - 2ab - b^2 \\
&\overset{+2ab}{\Leftrightarrow} \quad 2a - a^2 = 2b - b^2 \\
&\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - 2a = b^2 - 2b \\
&\overset{+1}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - 2a + 1 = b^2 - 2b + 1 \\
&\overset{\text{binomische Formel)}}{\Leftrightarrow} \quad (a-1)^2 = (b-1)^2 \\
&\overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftrightarrow} \quad a - 1 = b - 1 \quad \underline{\text{oder}} \quad a - 1 = -(b-1) \\
&\overset{+1(+b)}{\Leftrightarrow} \quad a = b \quad \underline{\text{oder}} \quad \underbrace{a + b = 2}_{\text{kann wegen } a+b<1 \text{ (s.o.) nicht sein}}
\end{aligned}$$

Somit haben T_1 und T_2 genau dann den gleichen Flächeninhalt, wenn P auf der Geraden mit der Gleichung $x = y$ (erste Winkelhalbierenden) liegt. Da P auch im Inneren des Dreiecks liegen muss, ist die gesuchte Punktmenge hier die (offene) Strecke von $(0,0)$ nach $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Es gilt die Äquivalenz:

$$F(T_1) = F(R) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2 - a - 2b) = a \cdot b \quad \overset{:a\ \cdot 2}{\Leftrightarrow} \quad 2 - a - 2b = 2b \quad \overset{+a-2b}{\Leftrightarrow} \quad 2 - 4b = a$$

Die Gleichung $2 - 4b = a$ beschreibt die Gerade durch die Punkte $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (falls $a = 0$) und $(2,0)$ (falls $b = 0$). Nach obiger Äquivalenz haben T_1 und R genau dann den gleichen Flächeninhalt, wenn P auf dieser Geraden liegt. Da P auch im Inneren des Dreiecks liegen muss, ist die gesuchte Punktmenge hier die (offene) Strecke von $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ nach $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Beachte dabei: Der Randpunkt $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ergibt sich dabei als Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Gleichungen $2 - 4b = a$ (hier sind T_1 und R flächeninhaltsgleich) und $a + b = 1$ (Seite des gegebenen Dreiecks). Löst man beides nach a auf und setzt gleich, so erhält man: $2 - 4b = 1 - b \overset{+4b-1}{\Leftrightarrow} 1 = 3b \overset{:3}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} = b$
Mit $a + b = 1$ folgt daraus dann $a = \frac{1}{3}$.

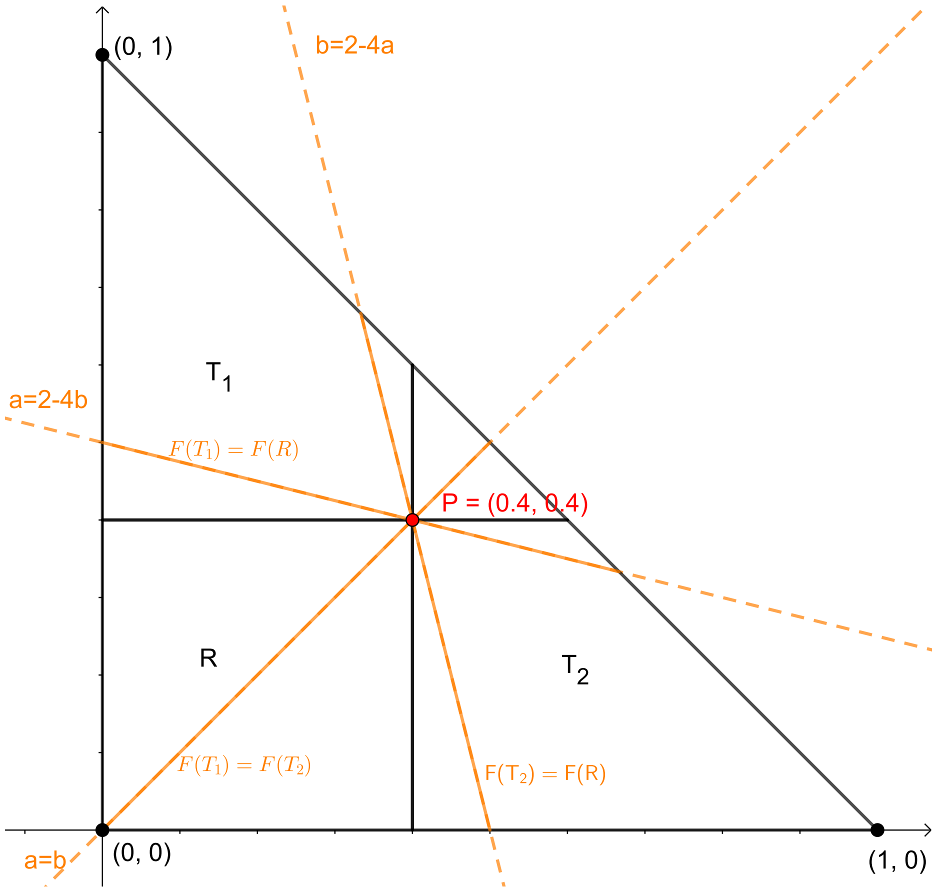
(c) Nach (a) und (b) haben nun T_1, T_2 und R den gleichen Flächeninhalt, wenn die beiden Gleichungen

$$\boxed{a = b} \quad (\Leftrightarrow F(T_1) = F(T_2)) \qquad \text{und} \qquad \boxed{a = 2 - 4b} \quad (\Leftrightarrow F(T_1) = F(R))$$

gelten. Durch Gleichsetzen folgt: $\quad b = 2 - 4b \overset{+4b}{\Leftrightarrow} 5b = 2 \overset{:5}{\Leftrightarrow} b = \frac{2}{5} = 0.4$

Mit $a = b$ ergibt sich daraus: $\quad P = (0.4, 0.4)$

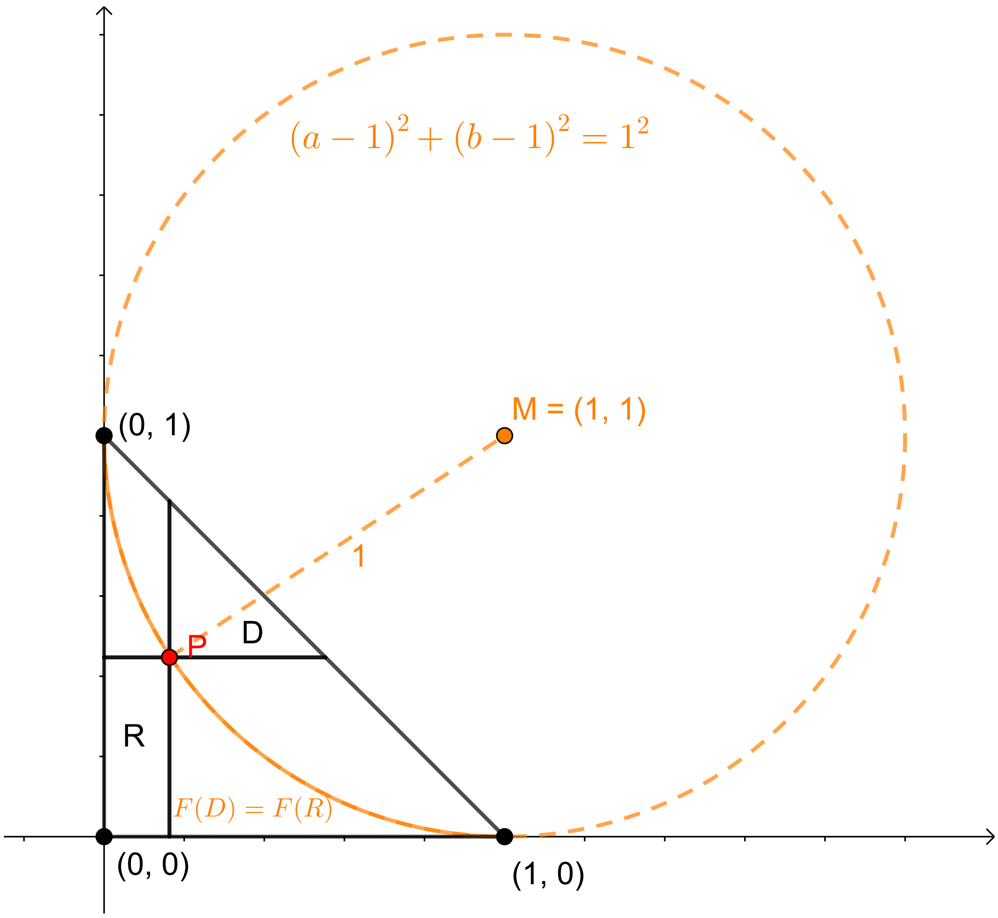
Die folgende Grafik zeigt die Ergebnisse aus (a), (b) und (c) sowie zusätzlich noch die Gerade mit der Gleichung $b = 2 - 4a$, auf der P liegt, wenn $F(T_2) = F(R)$ gilt.


(0, 1)
b=2-4a
T1
a=2-4b
F(T1) = F(R)
P = (0.4, 0.4)
R
T2
F(T1) = F(T2)
F(T2) = F(R)
a=b
(0, 0)
(1, 0)

(d) Es gilt die Äquivalenz:

$$\begin{aligned}
F(D) = F(R) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot (1 - a - b)^2 = ab \\
&\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \quad 1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2ab = 2ab \\
&\overset{-2ab+1}{\Leftrightarrow} \quad a^2 - 2a + 1 \ + \ b^2 - 2b + 1 = 1 \\
&\overset{\text{binomische Formel)}}{\Leftrightarrow} \quad (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1^2
\end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt den Rand eines Kreises mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1, 1)$. Nach obiger Äquivalenz haben D und R genau dann den gleichen Flächeninhalt, wenn P auf diesem Kreisrand liegt. Da P auch im Inneren des Dreiecks liegen muss, ist die gesuchte Punktmenge hier der Teil des Kreisrandes (Viertelkreisbogen) zwischen den Punkten $(0, 1)$ und $(1, 0)$.



Aufgabe OS1:

Alma, Birte, Clara, Dana und Emma haben eine Kiste, auf die man sich stellen kann.

- Wenn Alma sich auf die Kiste stellt, ist sie 20cm größer als Birte.
- Wenn Birte sich auf die Kiste stellt, ist sie 10cm größer als Clara.
- Wenn Clara sich auf die Kiste stellt, ist sie 20cm größer als Dana.
- Wenn Dana sich auf die Kiste stellt, ist sie 10cm größer als Emma.
- Wenn Emma sich auf die Kiste stellt, ist sie 20cm größer als Alma.

(a) Wie hoch ist die Kiste?

(b) Sortieren Sie die 5 Mädchen aufsteigend nach ihrer Körpergröße.

Lösung OS1:

(a) Seien A, B, C, D, E die Körpergrößen von Alma, Birte, Clara, Dana und Emma und K die Höhe der Kiste. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A + K &= B + 20\text{cm} \\ B + K &= C + 10\text{cm} \\ C + K &= D + 20\text{cm} \\ D + K &= E + 10\text{cm} \\ E + K &= F + 20\text{cm} \end{aligned}$$

Addiert man alle 5 Gleichungen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & A + B + C + D + E + 5K = B + C + D + E + A + 20\text{cm} + 10\text{cm} + 20\text{cm} + 10\text{cm} + 20\text{cm} \\ \overset{-A-B-C-D-E}{\Leftrightarrow} \quad & 5K = 80\text{cm} \\ \overset{:5}{\Leftrightarrow} \quad & K = 16\text{cm} \end{aligned}$$

Die Kiste ist als 16cm hoch.

(b) Setzt man $K = 16\text{cm}$ in obige Gleichungen ein, so folgt:

$$\begin{aligned} A + 16\text{cm} &= B + 20\text{cm} & \overset{-20\text{cm}}{\Leftrightarrow} \quad A - 4\text{cm} &= B & (1) \\ B + 16\text{cm} &= C + 10\text{cm} & \overset{-10\text{cm}}{\Leftrightarrow} \quad B + 6\text{cm} &= C & (2) \\ C + 16\text{cm} &= D + 20\text{cm} & \overset{-20\text{cm}}{\Leftrightarrow} \quad C - 4\text{cm} &= D & (3) \\ D + 16\text{cm} &= E + 10\text{cm} & \overset{-10\text{cm}}{\Leftrightarrow} \quad D + 6\text{cm} &= E & (4) \\ E + 16\text{cm} &= F + 20\text{cm} & \overset{-20\text{cm}}{\Leftrightarrow} \quad E - 4\text{cm} &= A & (5) \end{aligned}$$

- Aus Gleichung (1) entnehmen wir: $\boxed{\text{Birte ist 4cm kleiner als Alma.}}$
- Setzen wir (1) in (2) ein, so folgt: $A - 4\text{cm} + 6\text{cm} = C \Leftrightarrow A + 2\text{cm} = C$

  Somit: $\boxed{\text{Clara ist 2cm größer als Alma.}}$
- Setzen wir dies nun in (3) ein, so folgt: $A + 2\text{cm} - 4\text{cm} = D \Leftrightarrow A - 2\text{cm} = D$

  Somit: $\boxed{\text{Dana ist 2cm kleiner als Alma.}}$
- Setzen wir dies nun in (4) ein, so folgt: $A - 2\text{cm} + 6\text{cm} = E \Leftrightarrow A + 4\text{cm} = E$

  Somit: $\boxed{\text{Emma ist 4cm größer als Alma.}}$
- Zur Kontrolle: Setzen wir dies nun in (5) ein, so folgt: $A + 4\text{cm} - 4\text{cm} = A \Leftrightarrow A = A$

Also lautet die aufsteigende Sortierung der Mädchen nach ihrer Körpergröße:

$$\underbrace{\text{Birte} \;,\; \text{Dana} \;,\; \text{Alma} \;,\; \text{Clara} \;,\; \text{Emma}}_{\text{klein} \longrightarrow \text{groß}}$$

Aufgabe OS2:

Der 22.02.2022 war ein sogenannter “Palindrom-Tag“, denn die Ziffernfolge, die das Datum beschreibt, ist vorwärts und rückwärts gelesen diesselbe.

2	2		0	2		2	0	2	2
Tag			Monat			Jahr			

Dabei wird das Datum mit jeweils 2 Ziffern für Tag und Monat (ggf. mit einer vorgestellten 0) und 4 Ziffern für das Jahr angegeben.

(a) Wann war vor dem 22.02.2022 der letzte Palindrom-Tag ?

(b) Wann wird nach dem 22.02.2022 der nächste Palindrom-Tag sein?

(c) Wieviele Palindrom-Tage gibt es im Zeitraum 01.01.2000 bis 31.12.2099 ?

Lösung OS2:

(a)

1	2		0	2		2	0	2	1
Tag			Monat			Jahr			

(b)

0	3		0	2		2	0	3	0
Tag			Monat			Jahr			

(c) Ein Palindrom-Tag im Zeitraum 01.01.2000 bis 31.12.2099 kann nur von der folgenden Form sein:

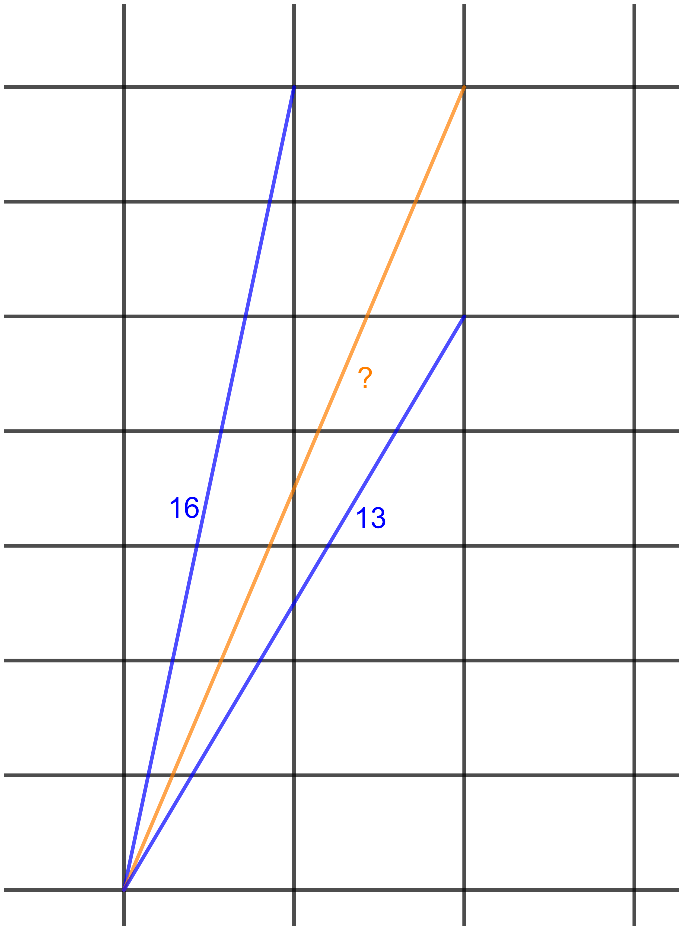
x	y		0	2		2	0	y	x
Tag			Monat			Jahr			

Also muss xy die Zifferndarstellung eines Tags im Februar sein. Der Februar hat maximal 29 Tage, für jeden dieser Tage existiert ein entsprechender Palindrom-Tag. (Man beachte, dass hier auch der 29. Februar möglich ist, da das Jahr 2092 ein Schaltjahr (durch 4 teilbare Jahreszahl) ist und daher der 29.02.2092 als Palindrom-Tag existiert.

Im Zeitraum 01.01.2000 bis 31.12.2099 gibt es genau 29 Palindrom-Tage.

Aufgabe OS3:

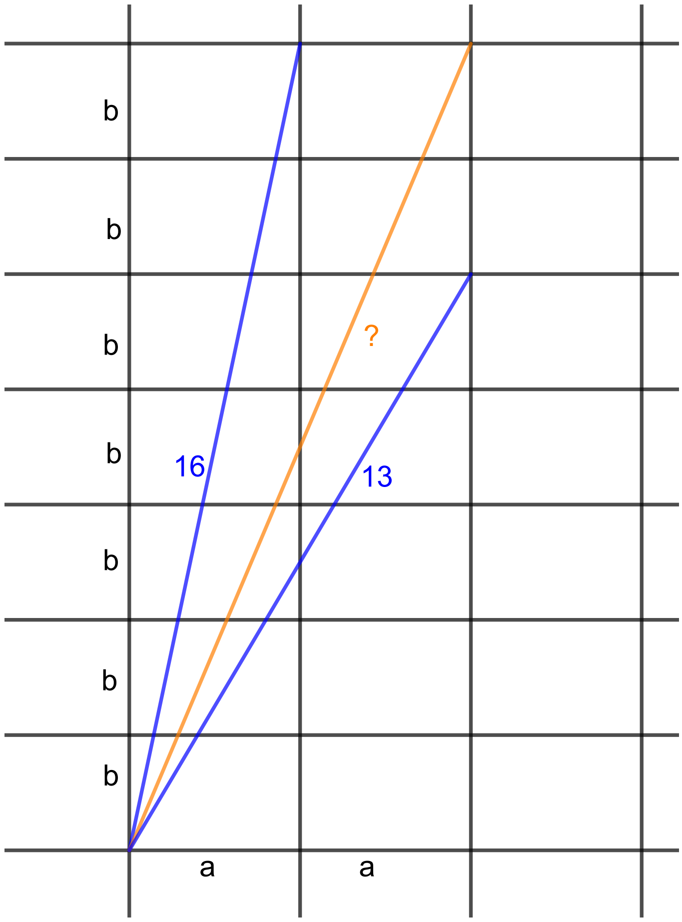
Die Ebene sei mit Rechtecken ausgelegt. Es sind drei Strecken eingezeichnet, zwei davon haben die Längen 13 bzw. 16 (siehe Grafik).



Wie lang ist die dritte eingezeichnete Strecke ?

Lösung OS3:

Seien a, b die Seitenlängen eines der Rechtecke (siehe Grafik).



Nach dem Satz des Pytagoras gilt (beachte, dass die Strecken mit vorgegebenen Längen die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit zu den Rechteckseiten parallelen Katheten sind):

$$\begin{array}{lccccccccccc} & (2\cdot a)^2 & + & (5\cdot b)^2 & = & 13^2 & \Rightarrow & 4\cdot a^2 & + & 25\cdot b^2 & = & 169 \quad (1) \\ \text{und} & (1\cdot a)^2 & + & (7\cdot b)^2 & = & 16^2 & \Rightarrow & a^2 & + & 49\cdot b^2 & = & 256 \quad (2) \end{array}$$

Multiplipliziert man die zweite Gleichung mit 4 und zieht davon die erste Gleichung ab, so folgt:

$$4\cdot(2)-(1): \quad \underbrace{(4\cdot 1-4)}_{=0}\cdot a^2 + \underbrace{(4\cdot 49-25)}_{=171}\cdot b^2 = \underbrace{4\cdot 256-169}_{=855} \quad \Leftrightarrow \quad 171\cdot b^2 = 855 \quad \overset{:171}{\Rightarrow} \quad b^2 = 5$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich:

$$a^2 + 49\cdot 5 = 256 \quad \overset{-49\cdot 5}{\Rightarrow} \quad a^2 = 256 - 49\cdot 5 = 256 - 245 = 11$$

Die gesuchte Streckenlänge x ergibt sich nun ebenfalls nach dem Satz des Pytagoras durch:

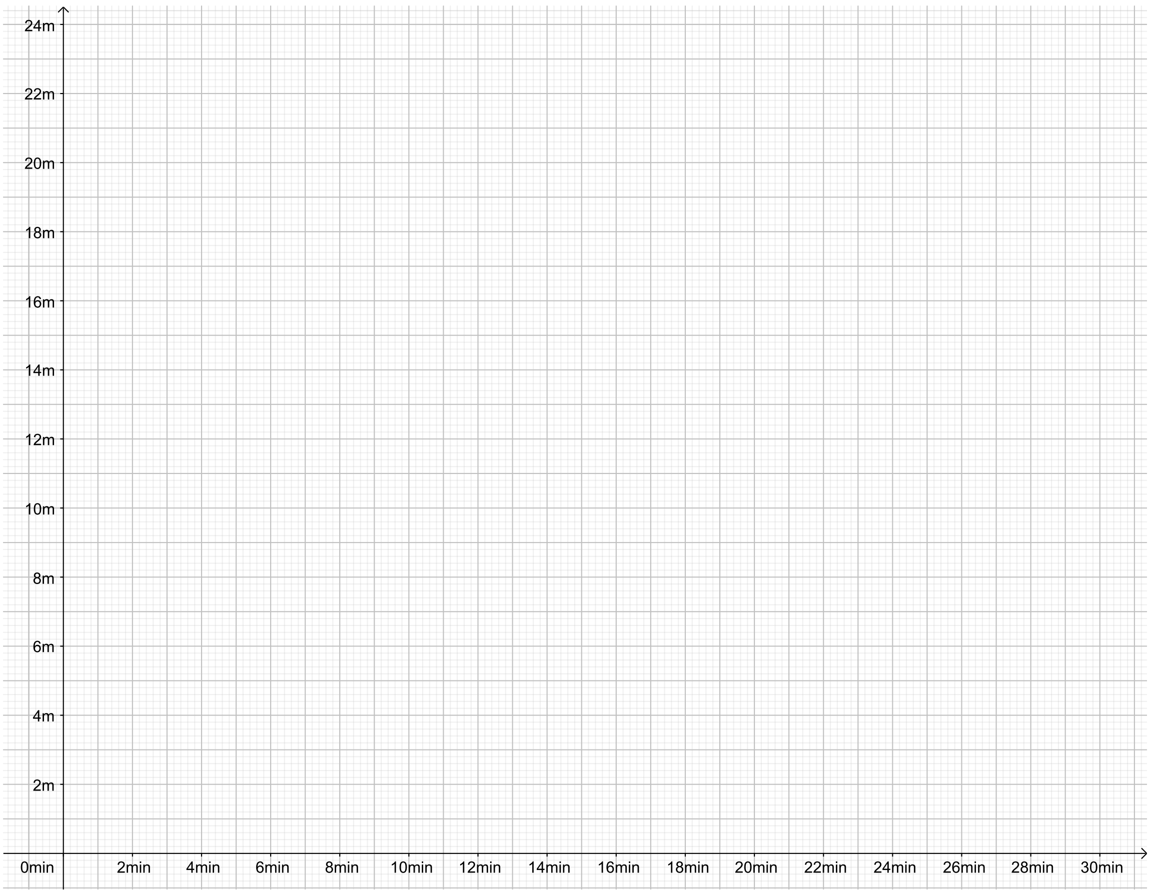
$$x^2 = (2\cdot a)^2 + (7\cdot b)^2 = 4\cdot a^2 + 49\cdot b^2 = 4\cdot 11 + 49\cdot 5 = 289 \quad \overset{\sqrt{\cdot}}{\Rightarrow} \quad x = \sqrt{289} = 17$$

Aufgabe OS4:

Die 6 Meter lange Schlange Tscharley kriecht mit einer Geschwindigkeit vom 1 Meter pro Minute auf ihren Futternapf zu. Währenddessen läuft Ama, die Ameise mit einer Geschwindigkeit von 2 Metern pro Minute immer auf Tscharleys Rücken hin und her, vom vorderen Ende (Kopf) zum hinteren Ende (Schwanzspitze) und wieder zurück.

Zum Zeitpunkt 0 Minuten befindet sich Tscharleys Kopf genau 20 Meter vom Futternapf entfernt und Ama befindet sich genau am Kopf von Tscharley.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, die den Abstand von Ama zum Futternapf (y-Achse) in Abhängigkeit von der Zeit (x-Achse) angibt. Als Definitionsbereich (x-Achse) soll dabei das Intervall $[0, T]$ gewählt werden, wobei T der Zeitpunkt ist, an dem Ama den Futternapf erreicht. (Beachten Sie, dass Tscharley anhält, wenn sein Kopf den Napf erreicht.)



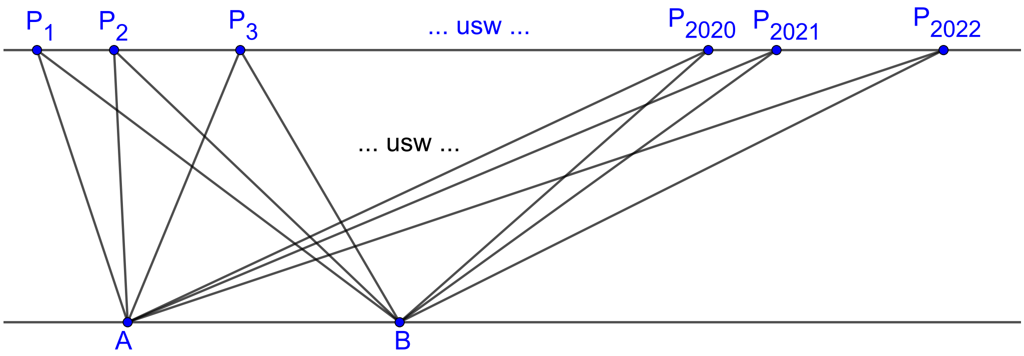
Lösung OS4:


24m
22m
20m
18m
16m
14m
12m
10m
8m
6m
4m
2m
0min
2min
4min
6min
8min
10min
12min
14min
16min
18min
20min
22min
24min
26min
28min
30min

Aufgabe OS5:

Gegeben seien zwei parallele Geraden sowie zwei Punkte A und B auf der einen Geraden und 2022 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2022}$ auf der anderen Geraden.

Nun werden die beiden Punkte A und B jeweils mit allen Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_{2022}$ durch Strecken verbunden.



Wieviele Schnittpunkte entstehen dadurch im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden?

Lösung OS5:

Die Strecke $\overline{AP_1}$ schneidet keine der Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{0 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_1}$

Die Strecke $\overline{AP_2}$ schneidet die Strecke $\overline{BP_1}$, aber keine der Strecken $\overline{BP_2}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{1 Schnittpunkt}}$ mit $\overline{AP_2}$

Die Strecke $\overline{AP_3}$ schneidet die Strecken $\overline{BP_1}$ und $\overline{BP_2}$, aber keine der Strecken $\overline{BP_3}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{2 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_3}$

usw.

Die Strecke $\overline{AP_{2021}}$ schneidet die Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{2020}}$, aber nicht die Strecken $\overline{BP_{2021}}$ und $\overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{2020 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_{2021}}$

Die Strecke $\overline{AP_{2022}}$ schneidet die Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{2021}}$, aber nicht die Strecke $\overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{\text{2021 Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_{2022}}$

<u>Allgemeine Formulierung:</u>

Die Strecke $\overline{AP_k}$ (für $1 \le k \le 2022$) schneidet die Strecken $\overline{BP_1}, \ldots, \overline{BP_{k-1}}$, aber keine der Strecken $\overline{BP_k}, \ldots, \overline{BP_{2022}}$ im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden. Also:
$\boxed{k-1 \text{ Schnittpunkte}}$ mit $\overline{AP_k}$ (für $1 \le k \le 2022$)

Insgesamt entstehen also

$$\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+2020+2021 &= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} & 0 & + & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 2020 & + & 2021 \\ + & 2021 & + & 2020 & + & 2019 & + & \ldots & + & 1 & + & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\underbrace{2021+2021+2021+\ldots+2021+2021}_{\text{2022-mal}}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2022\cdot 2021 \\
&= 1011\cdot 2021 \\
&= 2\,043\,231
\end{aligned}$$

Schnittpunkte im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden.

Aufgabe OS6:

(a) Wieviele verschiedene sechsstellige Zahlen kann man aus den Ziffern $1, 1, 1, 2, 2, 3$ bilden?

(b) Was ist die Summe aller dieser Zahlen?

Lösung OS6:

(a) Man hat

- 6 Möglichkeiten für die Position der Ziffer 3,
- danach noch $\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$ Möglichkeiten für die Positionen der Ziffern $2, 2$,

  Man hat 5 Möglichkeiten eine der beiden Positionen und danach noch 4 Möglichkeiten die andere Position zu wählen. Da man die beiden Positionen auch in umgekehrter Reihenfolge wählen kann, fallen jeweils 2 Kombinationen zusammen, so dass man am Ende durch 2 dividieren muss.
- danach noch 1 Möglichkeiten für die Position der Ziffer $1, 1, 1$.

Insgesamt kann man also $6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$ verschiedene Zahlen wie gefordert bilden.

(b) In den 60 Zahlen aus (a) steht an jeder Stelle (Einerstelle, Zehnerstelle, Hunderterstelle, Tausenderstelle, Zehntausenderstelle, Hunderttausenderstelle) jeweils

- 30-mal die Ziffer 1,
- 20-mal die Ziffer 2,
- und 10-mal die Ziffer 3.

Die Summe der Ziffern an einer Stelle beträgt also jeweils:

$$30 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 30 + 40 + 30 = 100$$

Insgesamt beträgt die Summe der Zahlen folglich:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{100 \cdot 1}_{\text{Einerstelle}} + \underbrace{100 \cdot 10}_{\text{Zehnerstelle}} + \underbrace{100 \cdot 100}_{\text{Hunderterstelle}} + \underbrace{100 \cdot 1000}_{\text{Tausenderstelle}} + \underbrace{100 \cdot 10000}_{\text{Zehntausenderstelle}} + \underbrace{100 \cdot 100000}_{\text{Hunderttausenderstelle}} \\
= \; & 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000 + 10000000 \\
= \; & 11\,111\,100
\end{aligned}$$

Aufgabe OS7:

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\left(\left((x-7)^2-65\right)^2-1696\right)^2-1440^2=0$$

(mit $x \in \mathbb{R}$) an.

Hinweis: Sie können die folgende Liste mit Quadratzahlen nutzen:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
k^2	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600

k	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
k^2	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600

Lösung OS7:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz:

$$
\begin{array}{cl}
 & \left(\left((x-7)^2-65\right)^2-1696\right)^2-1440^2=0 \\
\overset{+1440^2}{\Leftrightarrow} & \left(\left((x-7)^2-65\right)^2-1696\right)^2=1440^2 \\
\overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftrightarrow} & \left((x-7)^2-65\right)^2-1696=1440 \quad \underline{\text{oder}} \quad \left((x-7)^2-65\right)^2-1696=-1440 \\
\overset{+1696}{\Leftrightarrow} & \left((x-7)^2-65\right)^2=3136 \quad \underline{\text{oder}} \quad \left((x-7)^2-65\right)^2=256 \\
\Leftrightarrow & \left((x-7)^2-65\right)^2=56^2 \quad \underline{\text{oder}} \quad \left((x-7)^2-65\right)^2=16^2 \\
\overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftrightarrow} & \qquad (x-7)^2-65=56 \quad \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2-65=-56 \\
 & \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2-65=16 \quad \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2-65=-16 \\
\overset{+56}{\Leftrightarrow} & \qquad (x-7)^2=121 \quad \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2=9 \\
 & \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2=81 \quad \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2=49 \\
\Leftrightarrow & \qquad (x-7)^2=11^2 \quad \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2=3^2 \\
 & \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2=9^2 \quad \underline{\text{oder}} \quad (x-7)^2=7^2 \\
\overset{\sqrt{\cdot}}{\Leftrightarrow} & \qquad x-7=11 \quad \underline{\text{oder}} \quad x-7=-11 \quad \underline{\text{oder}} \quad x-7=3 \quad \underline{\text{oder}} \quad x-7=-3 \\
 & \underline{\text{oder}} \quad x-7=9 \quad \underline{\text{oder}} \quad x-7=-9 \quad \underline{\text{oder}} \quad x-7=7 \quad \underline{\text{oder}} \quad x-7=-7 \\
\overset{+7}{\Leftrightarrow} & \qquad x=18 \quad \underline{\text{oder}} \quad x=-4 \quad \underline{\text{oder}} \quad x=10 \quad \underline{\text{oder}} \quad x=4 \\
 & \underline{\text{oder}} \quad x=16 \quad \underline{\text{oder}} \quad x=-2 \quad \underline{\text{oder}} \quad x=14 \quad \underline{\text{oder}} \quad x=0
\end{array}
$$

Die Lösungsmenge der angegebenen Gleichung ist also:

$$L = \{\ -4\ ,\ -2\ ,\ 0\ ,\ 4\ ,\ 10\ ,\ 14\ ,\ 16\ ,\ 18\ \}$$

Aufgabe OS8:

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt M sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises mit Abstand 1 zum Kreisrand.

Seien B_1 und B_2 die Berührpunkte der beiden durch den Punkt P verlaufenden Tangenten. Die Längen der Tangentenabschnitte (d.h. der Strecken $\overline{PB_1}$ bzw. $\overline{PB_2}$) betrage jeweils 3.

(a) Wie groß ist der Radius des Kreises?

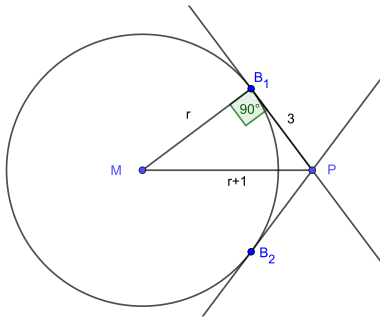
(b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle PB_1B_2$?

Lösung OS8:

(a) Sei r der gesuchte Kreisradius.

Das Dreieck $\triangle PB_1M$ hat einen rechten Winkel bei B_1 (Tangente steht immer senkrecht auf dem Kreisradius). Hierbei gilt:

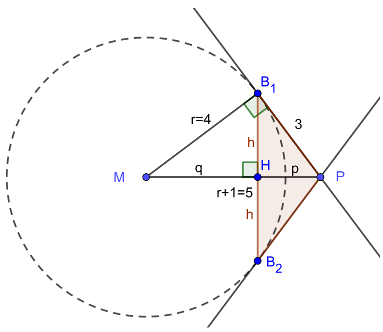
$$|\overline{MB_1}| = r \quad , \quad |\overline{PB_1}| = 3 \quad , \quad |\overline{MP}| = r + 1$$



Nach dem Satz des Pytagoras folgt:

$$r^2 + 3^2 = (r+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 9 = r^2 + 2r + 1 \quad \overset{-r^2-1}{\Leftrightarrow} \quad 8 = 2r \quad \overset{:2}{\Leftrightarrow} \quad 4 = r$$

(b) Sei H der Schnittpunkt von B_1B_2 und MP. Aus Symmetriegründen steht dabei B_1B_2 senkrecht auf MP und es gilt $|\overline{HB_1}| = |\overline{HB_2}| = h$. Weiter sei $|\overline{HP}| = p$ und $|\overline{HM}| = q$.



Nach Katheten- und Hohensatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle PB_1M$ (hier ist $\overline{HB_1}$ die Höhe auf die Hypotenuse $\overline{MP}$) gilt:

$$h^2 = p \cdot q = \frac{|\overline{PB_1}|^2}{|\overline{MP}|} \cdot \frac{|\overline{MB_1}|^2}{|\overline{MP}|} = \frac{4^2 \cdot 3^2}{5^2} \quad \overset{\sqrt{\cdot}}{\Rightarrow} \quad h = \frac{12}{5}$$

Weiterhin folgt nun nach dem Kathetensatz:

$$p = \frac{|\overline{PB_1}|^2}{|\overline{MP}|} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

Im zu untersuchenden Dreieck $\triangle PB_1B_2$ ist p die Höhe auf die Grundseite $\overline{B_1B_2}$ mit $|\overline{B_1B_2}| = 2h$ und daher gilt:

$$F(\triangle PB_1B_2) = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot p = h \cdot p = \frac{12}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{108}{25} = 4.32$$