

Aufgaben für die Klassenstufen 11/12

ohne Lösungen

Gruppenwettbewerb	Aufgaben OG1, OG2, OG3, OG4
Speedwettbewerb	Aufgaben OS1, OS2, OS3, OS4, OS5, OS6, OS7, OS8

TAG DER MATHEMATIK 2022

Aufgabe OG1:

Anna, Bert und Christian laufen Runden auf einer Laufbahn. Anna und Bert laufen im Uhrzeigersinn, Christian läuft gegen den Uhrzeigersinn. Alle drei starten am selben Punkt und laufen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit.

- 75 Sekunden nach dem Start begegnen sich Anna und Christian erstmals.
- 84 Sekunden nach dem Start begegnen sich Bert und Christian erstmals.
- Anna überholt erstmals Bert, nachdem sie genau 3.5 Runden gelaufen ist.

- (a) Wie lange benötigt jeder der drei für eine Runde?
(b) Nach welcher Zeit (ab dem Start) treffen erstmal alle drei am selben Punkt aufeinander?
(c) Nach welcher Zeit (ab dem Start) treffen erstmal alle drei am Startpunkt wieder aufeinander?
-

Aufgabe OG2:

- (a) Bestimmen Sie alle möglichen Kombinationen von Ziffern A, B aus $1, \dots, 9$, so dass für die zweistellige Zahl AB und die dreistellige Zahl BAA mit den Ziffern A und B gilt:

$$8 \cdot AB = BAA$$

- (b) Bestimmen Sie alle möglichen Kombinationen von Ziffern A, B aus $1, \dots, 9$, so dass für die zweistellige Zahl AB und die vierstellige Zahl $BAAB$ mit den Ziffern A und B gilt:

$$77 \cdot AB = BAAB$$

- (c) Bestimmen Sie alle möglichen Kombinationen von Ziffern A aus $1, \dots, 9$ und B, C aus $0, \dots, 9$, so dass für die dreistellige Zahl ABC und die fünfstellige Zahl $AAABC$ mit den Ziffern A und B gilt:

$$89 \cdot ABC = AAABC$$

Aufgabe OG3:

Wir betrachten den Graphen der Funktion (Hyperbel):

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

- (a) Die beiden Endpunkte einer Strecke liegen auf dem Graphen von f . Die Strecke verläuft durch den Nullpunkt $O = (0, 0)$ und hat die Länge $\sqrt{17}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Endpunkte der Strecke (Es gibt zwei mögliche Ergebnisse.)

- (b) Die vier Endpunkte der beiden möglichen Strecken aus (a) bilden ein Viereck.

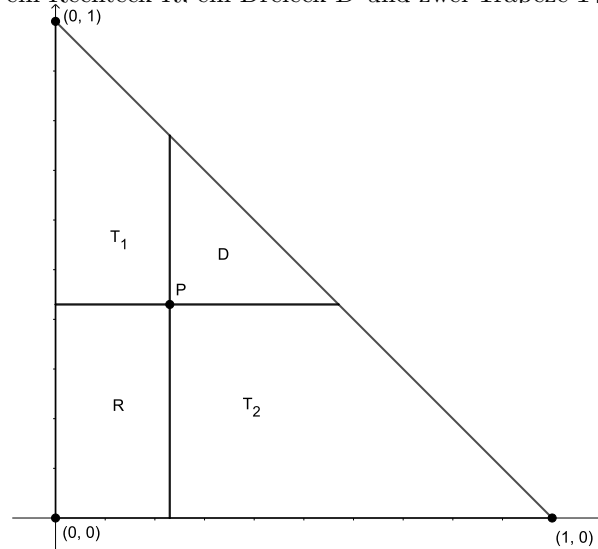
Um was für ein Viereck handelt es sich dabei? (Nennen Sie einen möglichst speziellen Begriff.)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Aufgabe OG4:

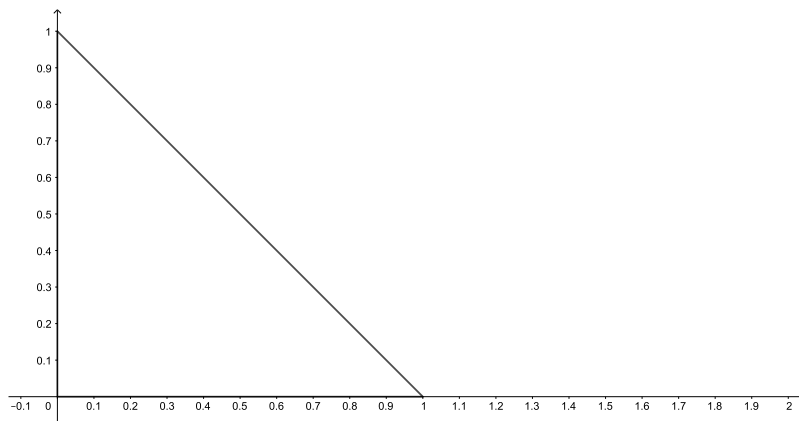
Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$.

Nun wird ein Punkt P im Inneren dieses Dreiecks gewählt. Durch die durch den Punkt P verlaufenden Parallelen zu x -Achse und y -Achse wird das Dreieck $\triangle ABC$ in vier Teilflächen zerlegt. Es handelt sich dabei um ein Rechteck R , ein Dreieck D und zwei Trapeze T_1 und T_2 (siehe Grafik):



Anmerkung: Die gesuchten Punktmenge sind als geometrische Objekte eindeutig zu beschreiben.

- Bestimmen Sie die Punktmenge, in der P liegen kann, so dass T_1 und T_2 den gleichen Flächeninhalt haben. Zeichnen Sie diese Punktmenge in die Grafik unten ein.
- Bestimmen Sie die Punktmenge, in der P liegen kann, so dass T_1 und R den gleichen Flächeninhalt haben. Zeichnen Sie diese Punktmenge in die Grafik unten ein.
- Bestimmen Sie P so, dass T_1 , T_2 und R den gleichen Flächeninhalt haben.
- Bestimmen Sie die Punktmenge, in der P liegen kann, so dass D und R den gleichen Flächeninhalt haben. Zeichnen Sie diese Punktmenge in die Grafik unten ein.



TAG DER MATHEMATIK 2022

Aufgabe OS1:

Alma, Birte, Clara, Dana und Emma haben eine Kiste, auf die man sich stellen kann.

- Wenn Alma sich auf die Kiste stellt, ist sie 20cm größer als Birte.
- Wenn Birte sich auf die Kiste stellt, ist sie 10cm größer als Clara.
- Wenn Clara sich auf die Kiste stellt, ist sie 20cm größer als Dana.
- Wenn Dana sich auf die Kiste stellt, ist sie 10cm größer als Emma.
- Wenn Emma sich auf die Kiste stellt, ist sie 20cm größer als Alma.

(a) Wie hoch ist die Kiste?

(b) Sortieren Sie die 5 Mädchen aufsteigend nach ihrer Körpergröße.

Aufgabe OS2:

Der 22.02.2022 war ein sogenannter "Palindrom-Tag", denn die Ziffernfolge, die das Datum beschreibt, ist vorwärts und rückwärts gelesen dieselbe.

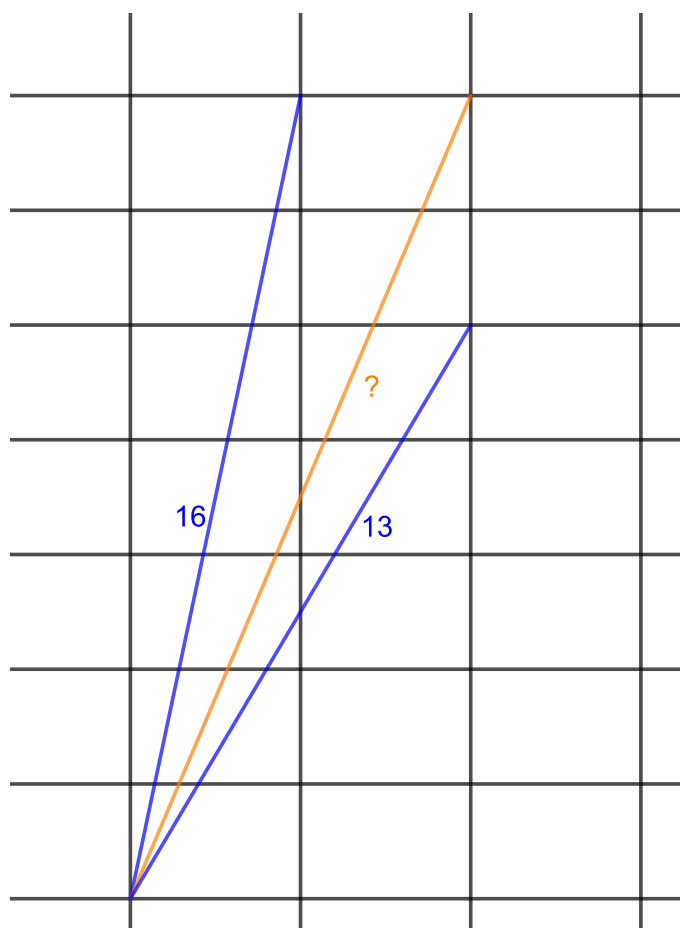
2	2		0	2		2	0	2	2
Tag			Monat			Jahr			

Dabei wird das Datum mit jeweils 2 Ziffern für Tag und Monat (ggf. mit einer vorgestellten 0) und 4 Ziffern für das Jahr angegeben.

- (a) Wann war vor dem 22.02.2022 der letzte Palindrom-Tag ?
- (b) Wann wird nach dem 22.02.2022 der nächste Palindrom-Tag sein?
- (c) Wieviele Palindrom-Tage gibt es im Zeitraum 01.01.2000 bis 31.12.2099 ?

Aufgabe OS3:

Die Ebene sei mit Rechtecken ausgelegt. Es sind drei Strecken eingezeichnet, zwei davon haben die Längen 13 bzw. 16 (siehe Grafik).



Wie lang ist die dritte eingezeichnete Strecke ?

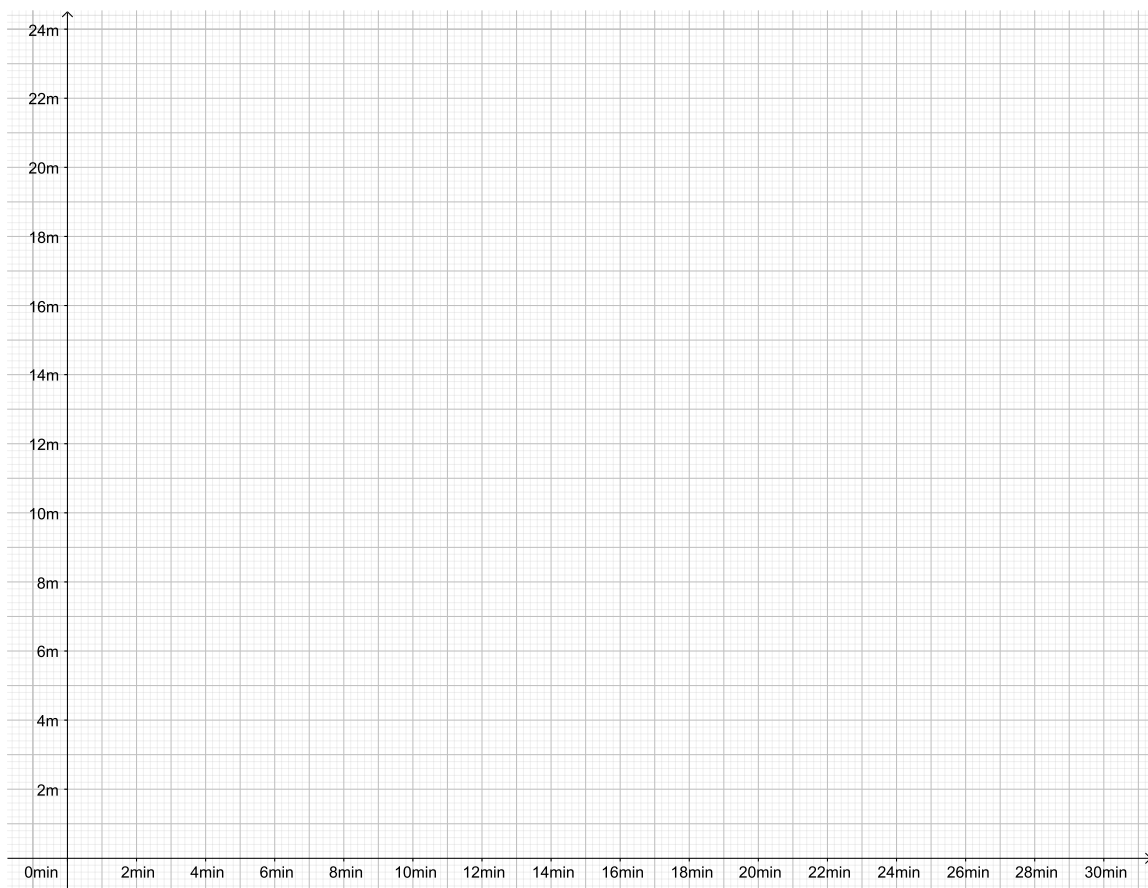
TAG DER MATHEMATIK 2022

Aufgabe OS4:

Die 6 Meter lange Schlange Tcharley kriecht mit einer Geschwindigkeit von 1 Meter pro Minute auf ihren Futternapf zu. Währenddessen läuft Ama, die Ameise mit einer Geschwindigkeit von 2 Metern pro Minute immer auf Tcharleys Rücken hin und her, vom vorderen Ende (Kopf) zum hinteren Ende (Schwanzspitze) und wieder zurück.

Zum Zeitpunkt 0 Minuten befindet sich Tcharleys Kopf genau 20 Meter vom Futternapf entfernt und Ama befindet sich genau am Kopf von Tcharley.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, die den Abstand von Ama zum Futternapf (y-Achse) in Abhängigkeit von der Zeit (x-Achse) angibt. Als Definitionsbereich (x-Achse) soll dabei das Intervall $[0, T]$ gewählt werden, wobei T der Zeitpunkt ist, an dem Ama den Futternapf erreicht. (Beachten Sie, dass Tcharley anhält, wenn sein Kopf den Napf erreicht.)

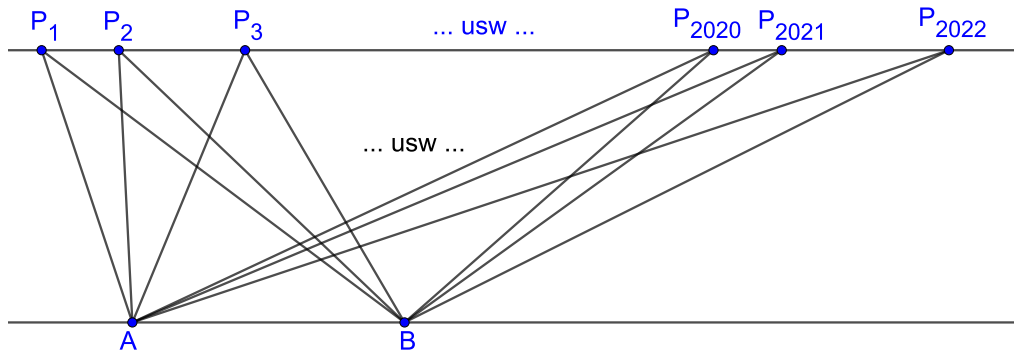


TAG DER MATHEMATIK 2022

Aufgabe OS5:

Gegeben seien zwei parallele Geraden sowie zwei Punkte A und B auf der einen Geraden und 2022 Punkte $P_1, P_2, \dots, P_{2022}$ auf der anderen Geraden.

Nun werden die beiden Punkte A und B jeweils mit allen Punkten $P_1, P_2, \dots, P_{2022}$ durch Strecken verbunden.



Wieviele Schnittpunkte entstehen dadurch im Bereich zwischen den beiden parallelen Geraden?

Aufgabe OS6:

- (a) Wieviele verschiedene sechsstellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 1, 1, 2, 2, 3 bilden?
 (b) Was ist die Summe aller dieser Zahlen?

Aufgabe OS7:

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\left(((x-7)^2 - 65)^2 - 1696 \right)^2 - 1440^2 = 0$$

(mit $x \in \mathbb{R}$) an.

Hinweis: Sie können die folgende Liste mit Quadratzahlen nutzen:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
k^2	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600

k	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
k^2	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600

TAG DER MATHEMATIK 2022

Aufgabe OS8:

Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt M sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises mit Abstand 1 zum Kreisrand.

Seien B_1 und B_2 die Berührungspunkte der beiden durch den Punkt P verlaufenden Tangenten. Die Längen der Tangentenabschnitte (d.h. der Strecken $\overline{PB_1}$ bzw. $\overline{PB_2}$) betrage jeweils 3.

- (a) Wie groß ist der Radius des Kreises?
- (b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle PB_1B_2$?